

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ОСНОВЫ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Учебное пособие



Казанский университет
2014

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета
ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»
Заседаний кафедры радиофизики Института физики
кафедры математической статистики ИВМиИТ КФУ
Протокол №8 от 10.06.14
Протокол №9 от 14.06.14*

Составители:

Кандидат физико-математических наук, доцент И.С. Нугманов
Кандидат физико-математических наук, ассистент А.Ю. Шемахин

Рецензенты:

Кандидат физико-математических наук, доцент
А.М. Сидоров
Кандидат физико-математических наук, доцент
И.А. Насыров

Основы случайных процессов: учеб. пособие к курсам «Статистическая радиофизика и теория информации», «Теория информации», «Случайные процессы» / И.С. Нугманов, А.Ю. Шемахин.— Казань: Казанский университет, 2014.- 112 с.

ISBN

© Казанский университет, 2014

1. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

1.1. Общие понятия

Теорией случайных процессов называется математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений в динамике их развития.

При изучении явлений окружающего мира человечество часто сталкивается с процессами, течение которых заранее предсказать в точности невозможно. Эта неопределенность (непредсказуемость) вызвана влиянием случайных факторов, воздействующих на ход процесса.

Примеры случайных процессов [13].

1. Напряжение в электросети, номинально постоянное и равное 220 В, фактически меняется во времени, колеблется вокруг номинала под влиянием таких случайных факторов, как количество и вид включенных в сеть приборов, моменты их включений и выключений и т. д.

2. Население города (или области) меняется с течением времени случайным (непредсказуемым) образом под влиянием таких факторов, как рождаемость, смертность, миграция и т. д.

3. Уровень воды в реке (или в водохранилище) меняется во времени случайным образом в зависимости от погоды, количества осадков, таяния снега, интенсивности оросительных мероприятий и т. д.

4. Частица, совершающая броуновское движение в поле зрения микроскопа, меняет свое положение случайным образом в результате соударений с молекулами жидкости.

5. Представим полет космической ракеты, которую необходимо вывести в заданный момент в заданную точку пространства с задан-

ными направлением и абсолютным значением вектора скорости. Фактическое движение ракеты не совпадает с расчетным из-за таких случайных факторов, как турбулентность атмосферы, неоднородность горючего, ошибки в отработке команд и т. д.

Строго говоря, в природе не существует совершенно не случайных, в точности детерминированных процессов, но есть процессы, на ход которых случайные факторы влияют так слабо, что при изучении явления ими можно пренебречь (пример: процесс обращения планет вокруг Солнца). Однако существуют и такие процессы, где случайность играет основную роль (пример: вышерассмотренный процесс броуновского движения частицы). Между двумя крайними случаями лежит целый спектр процессов, в которых случайность играет большую или меньшую роль. Учитывать (или не учитывать) случайность процесса зависит также и от того, какую практическую задачу решает исследователь. Например, при составлении расписания движения самолетов между двумя пунктами можно считать их траектории прямолинейными, а движение – равномерным; те же допущения не подойдут, если решается задача конструирования автопилота для управления полетом самолета.

Случайный процесс, протекающий в любой физической системе S , представляет собой случайные переходы системы из состояния в состояние. Состояние системы может быть охарактеризовано с помощью каких-то численных переменных: в простейшем случае – одной, а в более сложных – нескольких. В примере 1 процесс описывается одной переменной (напряжением U), случайным образом меняющейся во времени, являющейся функцией времени $U(t)$. Ана-

логично, в примере 2 население N меняется случайным образом во времени: $N(t)$. Так же и в примере 3 случайный процесс характеризуется одной функцией $N(t)$, где N – уровень воды в реке. Все эти три функции являются случайными функциями времени t . При фиксированном t каждая из них превращается в обычную случайную величину. *В результате опыта (когда он уже произведен) случайная функция превращается в обычную неслучайную функцию.* Например, если в ходе времени непрерывно измерять напряжение в сети, получится неслучайная функция $u(t)$, колеблющаяся вокруг номинала W_0 .

Несколько сложнее обстоит дело в примере 4: состояние частицы характеризуется уже не одной, а двумя случайными функциями $X(t)$ и $Y(t)$ – координатами частицы в поле микроскопа. Такой случайный процесс называется векторным, он описывается переменным случайным вектором, составляющие которого $X(t)$, $Y(t)$ меняются с течением времени. Для фиксированного значения аргумента случайный процесс превращается в систему двух случайных величин $X(t)$, $Y(t)$, изображаемую случайной точкой (случайным вектором $Q(t)$) на плоскости xOy . При изменении аргумента t точка $Q(t)$ будет перемещаться («блуждать») по плоскости. Еще сложнее обстоит дело с примером 5. Состояние ракеты в момент времени t характеризуется не только тремя координатами $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ центра массы ракеты, но и тремя составляющими ее скорости, тремя углами ориентации ракеты, угловыми скоростями движения вокруг центра массы, запасом топлива и т.п. Здесь пример многомерного случайного процесса: блуждание точки, описывающей состояние системы в момент времени t , происходит в многомерном пространстве. Сложности, связанные с изуче-

нием таких процессов, с увеличением размерности растут в огромной степени.

1.2. Функция распределения случайного процесса

Детерминированный процесс полностью определяется значением аргумента t . Для случайного процесса нельзя задать однозначное соответствие между аргументом и значениями функции. Одному значению аргумента может соответствовать множество значений функции, одни из которых более вероятны, другие – менее вероятны. *Случайный процесс $\xi(t)$ – это функция времени, которая при любом значении времени t есть случайная величина.* Во время эксперимента наблюдаются конкретные значения $x(t)$ случайного процесса $\xi(t)$,

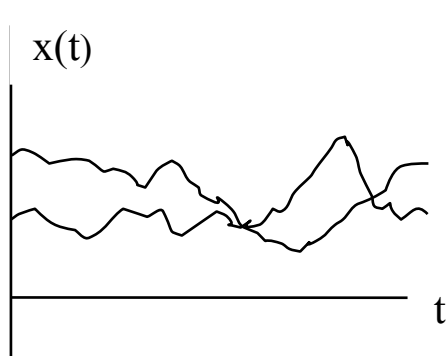


Рис. 1.1

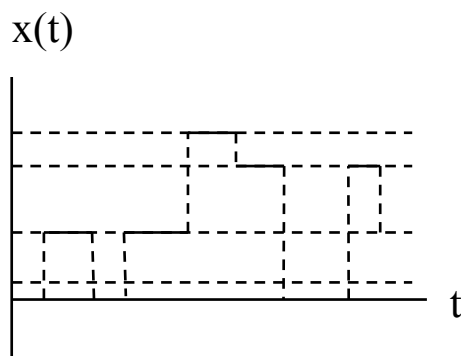


Рис. 1.2

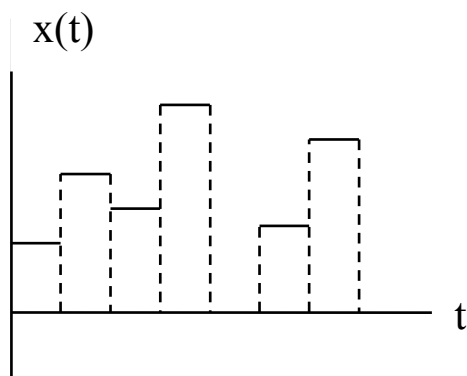


Рис. 1.3

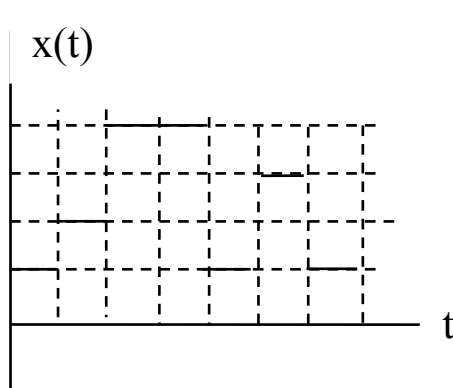


Рис. 1.4

которые называются реализациями случайного процесса. Случайный процесс $\xi(t)$ классифицируют по пространственно-временным признакам и по вероятностным характеристикам.

Для всех типов случайных процессов необходимо задать (определить) область Ω_ξ возможных значений $x(t)$ случайного процесса $\xi(t)$. В частности, случайный процесс $\xi(t)$ может принимать значения в интервале $(-\infty, \infty)$, т.е. $\Omega_\xi : -\infty < x(t) < \infty$.

В общем случае и время t , и пространство значений $x(t)$ случайного процесса $\xi(t)$ принимают непрерывные значения. Такой процесс называется процессом *общего типа*, см. рис. 1.1.

Если рассматриваются непрерывные значения времени t , а значения $x(t)$ случайного процесса $\xi(t)$ дискретны, то такой процесс называется *дискретным* процессом, см. рис. 1.2.

Если время t принимает дискретные значения, а значения $x(t)$ случайного процесса $\xi(t)$ непрерывны, то такой процесс называется *последовательностью общего типа*, см. рис. 1.3.

Если время t принимает дискретные значения и значения $x(t)$ случайного процесса $\xi(t)$ тоже дискретны, то такой процесс называется *дискретной случайной последовательностью*, см. рис. 1.4.

Рассмотрим r реализаций $x^{(1)}(t_1), x^{(2)}(t_1), \dots, x^{(r)}(t_1)$ случайного процесса $\xi(t)$ в момент времени t_1 (Рис 1.5) и зададим некоторый порог x_1 . Из множества r реализаций выберем те $m(x_1, t_1)$ реализаций, значения которых не превышают x_1 . Отношение $P^* = \frac{m(x_1, t_1)}{r}$ назы-

вается *частотой* появления реализаций, значения которых в момент t_1 не превышают величины x_1 .

Для различных r частота P^* будет различной, но с увеличением r она стабилизируется, приближаясь к некоторой постоянной величине. В теории вероятностей доказывается, что при неограниченном увеличении числа независимых реализаций r частота P^* будет сколь угодно мало отличаться от вероятности $P(\xi(t_1) \leq x_1)$ того, что наблюдаемые значения случайного процесса $\xi(t)$ в момент t_1 не превышают некоторой постоянной величины x_1 . Эта вероятность зависит от величины x_1 , времени t_1 и называется *одномерной функцией распределения вероятностей случайного процесса $\xi(t)$*

$$W_{\xi}(x_1, t_1) = P(\xi(t_1) \leq x_1) \quad (1.1)$$

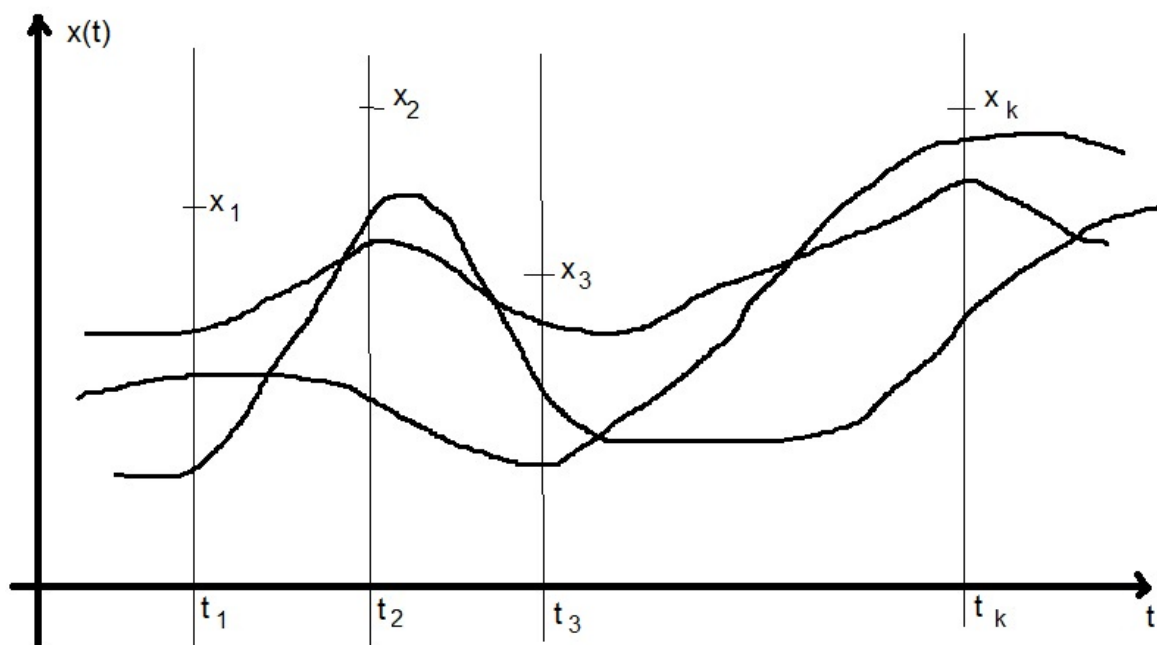


Рис. 1.5

Точно по такой же методике можно составить *многомерную (конечномерную) функцию распределения*

$$W_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_k, t_1, t_2, \dots, t_k) = \\ = P(\xi(t_1) \leq x_1, \xi(t_2) \leq x_2, \dots, \xi(t_k) \leq x_k), \quad (1.2)$$

отражающую вероятность того, что значения случайного процесса в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_k не превысят соответствующих значений x_1, x_2, \dots, x_k (попадут в «ворота», заданные значениями x_1, x_2, \dots, x_k).

Таким образом, случайный процесс $\xi(t)$ можно описать многомерной (конечномерной) функцией распределения (1.2). Чем больше точек отсчета t_k функции распределения, тем более полно описан случайный процесс. Необходимое количество точек отсчета k в исследуемой функции распределения зависит от решаемой проблемы.

Для процесса общего типа и для последовательности общего типа можно задать *одномерную плотность распределения вероятностей*:

$$w(x, t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{W(x + \Delta x, t) - W(x, t)}{\Delta x} = \frac{d W(x, t)}{d x} \quad (1.3)$$

либо *многомерную плотность распределения вероятностей*,

$$w(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_k) = \frac{\partial^k W(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_k)}{\partial x_1 \dots \partial x_k}. \quad (1.4)$$

Используя формулы (1.3) и (1.4), запишем интегральные формы одномерной и многомерной функций распределения

$$W(x, t) = \int_{-\infty}^x w(x, t) dx, \quad (1.5)$$

$$W(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_k} w(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_k) dx_1 \dots dx_k \quad (1.6)$$

Для дискретного процесса и дискретной случайной последовательности вводится *совместная вероятность* того, что случайный процесс находится в состояниях x_1, \dots, x_j в моменты времени t_1, \dots, t_k :

$$P(\xi(t_1)=x_1, \dots, \xi(t_k)=x_j). \quad (1.7)$$

Одномерная и многомерная функции распределения дискретного процесса и дискретной случайной последовательности будут иметь вид

$$W(x, t) = \sum_{x_i \leq x} P(\xi(t) = x_i),$$

$$W(x_m, \dots, x_j, t_1, \dots, t_k) = \sum_{x_1 \leq x_m \dots x_k \leq x_j} P(\xi(t_1) = x_m, \dots, \xi(t_k) = x_j), \quad (1.8)$$

где x_m, \dots, x_j – значения случайного процесса на дискретном множестве Ω_ξ .

Функция распределения вероятностей обладает свойствами:

1. Функция распределения является неубывающей функцией, т.е. если $x_1 < x_2$, то $W(x_1, t_1) < W(x_2, t_1)$,

$$0 \leq W(x_1, t_1) \leq 1, \quad 0 \leq W(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_k) \leq 1$$

$$2. W(x_1, x_2, t_1, t_2) =$$

$$= W(x_1, t_1) \cdot W(x_2, t_2 | x_1, t_1) = W(x_2, t_2) \cdot W(x_1, t_1 | x_2, t_2),$$

$$W(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_k) =$$

$$= W(x_1, t_1) \cdot W(x_2, t_2 | x_1, t_1) \cdot W(x_k, t_k | x_{k-1}, t_{k-1}, \dots, x_1, t_1).$$

$$3. W(-\infty, t_1) = 0, \quad W(x_1, \dots, -\infty, \dots, x_k, t_1, \dots, t_j, \dots, t_k) = 0,$$

$$W(\infty, t_1) = 1, \quad W(\infty, \dots, \infty, t_1, \dots, t_k) = 1,$$

где $W(A|B)$ – условная функция распределения множества A при известном B .

$$4. \quad W(\infty, x_2, t_1, t_2) = W(x_2, t_2),$$

$$\begin{aligned} W(x_1, \dots, x_{j-1}, \infty, x_{j+1}, \dots, x_k, t_1, \dots, t_j, \dots, t_k) = \\ = W(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k, t_1, \dots, t_k). \end{aligned}$$

Если $\xi(t)$ – дискретный случайный процесс, то процесс описывается вероятностью $P(\xi(t_i) = x_k) = p(x_k, t_i)$ – реализации x_k случайного процесса в момент $t = t_i$, и функция распределения вероятностей $W(\xi(t_i) \leq x) = \sum_{x_j \leq x} p(x_j, t_i)$.

Плотность распределения вероятностей обладает следующим свойствами:

1. Плотность распределения – неотрицательная функция

$$w(x_1, t_1) \geq 0, \dots, w(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_k) \geq 0,$$

2. Выполняется условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x_1, t_1) dx_1 = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_k) dx_1 \dots dx_k = 1.$$

3. Теорема умножения

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2, t_1, t_2) = \\ = w(x_1, t_1) \times w(x_2, t_2 | x_1, t_1) = w(x_2, t_2) \times w(x_1, t_1 | x_2, t_2), \end{aligned}$$

$$w(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_k) = \\ = w(x_1, t_1) \times w(x_2, t_2 | x_1, t_1) \times w(x_k, t_k | x_{k-1}, t_{k-1}, \dots, x_1, t_1),$$

где $w(x_k, t_k | x_{k-1}, t_{k-1}, \dots, x_1, t_1)$, $(k = 2, 3, \dots)$, – плотность распределения вероятностей случайного процесса $\xi(t)$ в момент t_k при условии, что в моменты времени t_1, \dots, t_{k-1} известны значения процесса x_1, \dots, x_{k-1} .

$$4. \int_{-\infty}^{\infty} w(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 = w(x_2, t_2),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x_1, \dots, x_j, \dots, x_k, t_1, \dots, t_j, \dots, t_k) dx_j = \\ = w(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k, t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_k)$$

5. Размерность одномерной плотности распределения вероятностей – $\frac{1}{[x]}$, размерность многомерной плотности распределения вероятностей $w(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_k) - \frac{1}{[x]^k}$, где $[x]$ – размерность измеряемой величины (ампер (сила тока), вольт (напряжение), паскаль (давление) и т.д.).

1.3. Моментные функции случайного процесса

Плотность распределения вероятностей $w(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_k)$ и функция распределения вероятностей $W(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_k)$ полностью описывают случайный процесс $\xi(t)$. Функции распределения вероятностей учитывают особенности случайного процесса. И чем

больше точек отсчета t_i , тем полнее описан процесс. Однако на практике часто встречаются задачи, в которых достаточно знать некоторые функции, характеризующие случайный процесс, такие как изменение среднего значения процесса во времени, энергию процесса, степень влияния одних значений процесса на другие и т.д. Эти функции называются *моментными функциями случайного процесса*.

Различают начальные и центральные, одномерные и смешанные моментные функции.

Начальной моментной функцией k -го порядка называется неслучайная функция времени, которая имеет следующий вид

$$m_{\xi}^k(t) := E[\xi^k(t)] = \begin{cases} \int_{\Omega_{\xi}} x^k w(x, t) dx & \text{для непрерывного распр. вер.} \\ \sum_i x_i^k p(x_i, t), & \text{для дискретного распр. вер} \end{cases},$$

где Ω_{ξ} – область определения случайного процесса в момент време-

ни t , $p(x_i, t) = P(\xi(t) = x_i)$ $i = 1, 2, \dots, M$, $\sum_{i=1}^M p(x_i, t) = 1$.

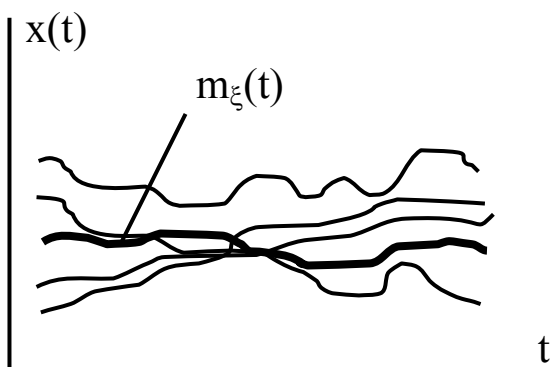


Рис. 1.6

В частности, если $k=1$, начальная моментная функция первого порядка называется *математическим ожиданием* случайного процесса,

$$E[\xi(t)] = m_{\xi}(t).$$

Математическое ожидание $m_\xi(t)$ характеризует среднее значение случайного процесса по ансамблю (по множеству всех реализаций) в произвольный момент времени (рис. 1.6). Размерность математического ожидания $[x]$ – размерность измеряемой величины x .

Центрированной моментной функцией k -го порядка относительно величины $m_\xi(t)$ называется неслучайная функция вида

$$E(\xi(t) - m_\xi(t))^k = \begin{cases} \int_{\Omega_\xi} (x - m_\xi(t))^k w(x, t) dx, & \text{для непрерывного сл. пр.} \\ \sum_i (x_i - m_\xi(t))^k p(x_i, t), & \text{для дискретного сл. пр..} \end{cases}$$

Центральная моментная функция второго порядка – дисперсия случайного процесса

$$\sigma_\xi^2(t) := D[\xi(t)] = E[(\xi(t) - m_\xi(t))^2] = E[\xi^2(t)] - (m_\xi(t))^2.$$

Дисперсия $D[\xi(t)]$ характеризует степень разброса значений случайного процесса около математического ожидания. Размерность дисперсии $[x]^2$ – квадрат размерности измеряемой величинных. Если $\xi(t)$ – ток или напряжение, то дисперсия $D[\xi(t)]$ пропорциональна мгновенной мощности, выделяемой на сопротивлении в 1 Ом.

Смешанной моментной функцией $(j + k)$ -го порядка называется неслучайная функция вида

$$E[\xi^j(t_1)\xi^k(t_2)] = \begin{cases} \int_{\Omega_\xi} \int_{\Omega_\xi} x_1^j x_2^k w(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2, & \text{для непрерывного сл. пр.,} \\ \sum_i \sum_m x_i^j x_m^k p(x_i, x_m, t_1, t_2), & \text{для дискретного сл. пр..} \end{cases}$$

здесь $w(x_1, x_2, t_1, t_2)$ – совместное распределение плотности вероятностей случайного процесса $\xi(t)$ в моменты времени t_1, t_2 ,

$p(x_i, x_m, t_1, t_2)$ – совместная вероятность реализации значений x_i и x_m случайного процесса $\xi(t)$ в моменты времени t_1, t_2

В частности для $j = k = 1$ имеем смешанную моментную функцию второго порядка, называемую *корреляционной функцией* –

$$B_{\xi}(t_1, t_2) = E[\xi(t_1) \xi(t_2)].$$

Если значения случайного процесса центрированы относительно математического ожидания, для $j = k = 1$ имеем *ковариационную функцию*

$$\begin{aligned} B_o(t_1, t_2) &= E[\overset{o}{\xi}(t_1) \overset{o}{\xi}(t_2)] = E[(\xi(t_1) - m_{\xi}(t_1))(\xi(t_2) - m_{\xi}(t_2))] = \\ &= \begin{cases} \int_{\Omega_{\xi}} \int_{\Omega_{\xi}} (x_1 - m_{\xi}(t_1))(x_2 - m_{\xi}(t_2)) w(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2, \\ \sum_i \sum_j (x_i - m_{\xi}(t_1))(x_j - m_{\xi}(t_2)) p(x_i, x_j, t_1, t_2) \end{cases} . \end{aligned}$$

Корреляционная и ковариационная функции характеризуют степень статистической связи между значениями случайного процесса в моменты времени t_1 и t_2 и имеют размерность, равную размерности квадрата измеряемой величины – $[x^2]$.

1.4. Стационарный случайный процесс

Ранее была произведена классификация случайных процессов по времени и пространству значений случайного процесса. С точки зрения вероятностных характеристик случайные процессы удобно подразделять на стационарные и нестационарные. Стационарные про-

цессы в свою очередь подразделяются на процессы стационарные в узком смысле (строго стационарные) и широком смысле.

Случайный процесс $\xi(t)$ называется *стационарным в узком смысле*, если функция распределения и плотность распределения *инвариантны* относительно сдвига во времени, т.е. они не меняются при любом сдвиге всей группы точек t_1, t_2, \dots, t_m вдоль оси времени на одну и ту же величину t_0 (всё распределение не меняется во времени):

$$W(x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_m) = W(x_1, \dots, x_m, t_1 + t_0, \dots, t_m + t_0),$$

$$w(x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_m) = w(x_1, \dots, x_m, t_1 + t_0, \dots, t_m + t_0).$$

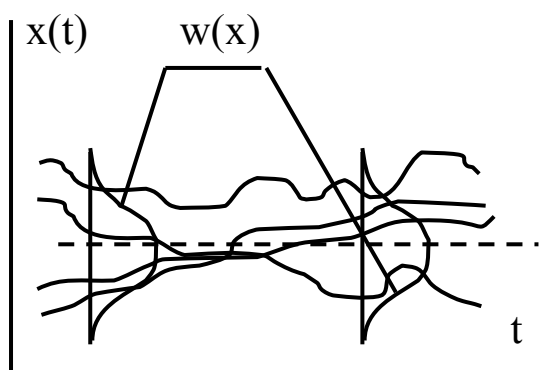


Рис. 1.7

Случайный процесс, не обладающий этим свойством, называется *нестационарным в узком смысле*. Стационарный случайный процесс – это установившийся процесс и реализуется при неизменных внешних условиях.

Из стационарности в узком смысле следует:

– независимость одномерной функции распределения вероятностей и плотности распределения вероятностей от времени, (рис. 1.7),

$$W(x_1, t_1) = W(x_1, t_1 + t_0) = W(x_1, 0),$$

$$w(x_1, t_1) = w(x_1, t_1 + t_0) = w(x_1) \quad (1.8)$$

– двумерная функция распределения вероятностей и плотность распределения вероятностей зависят от разности моментов времени t_1, t_2

$$\begin{aligned}
W(x_1, x_2, t_1, t_2) &= W(x_1, x_2, t_1 + t_0, t_2 + t_0) = \\
&= W(x_1, x_2, t_2 - t_1) = W(x_1, x_2, t_1 - t_2), \\
w(x_1, x_2, t_1, t_2) &= w(x_1, x_2, t_1 + t_0, t_2 + t_0) = \\
&= w(x_1, x_2, t_2 - t_1) = w(x_1, x_2, t_1 - t_2).
\end{aligned} \tag{1.9}$$

– многомерная плотность распределения вероятностей запишется как

$$\begin{aligned}
w(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) &= \\
= w(x_1, x_2, \dots, x_n, t_2 - t_1, \dots, t_n - t_1)
\end{aligned} \tag{1.10}$$

В свою очередь соотношения (1.8), (1.9) позволяют записать

$$\begin{aligned}
m_\xi(t_1) &= m_\xi, \quad \sigma_\xi^2(t_1) = \sigma_\xi^2, \\
B_\xi(t_1, t_2) &= B_\xi(t_2 - t_1) = B_\xi(t_1 - t_2) = B_\xi(\tau).
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Как видно из приведенных формул, математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени, а корреляционная и ковариационная функции зависят от разности моментов времени.

Стационарность в широком смысле. Случайный процесс назы-

вается *стационарным в широком смысле*, если математическое ожидание и дисперсия процесса не зависят от времени, а ковариационная и корреляционная функции зависят от разности моментов времени.

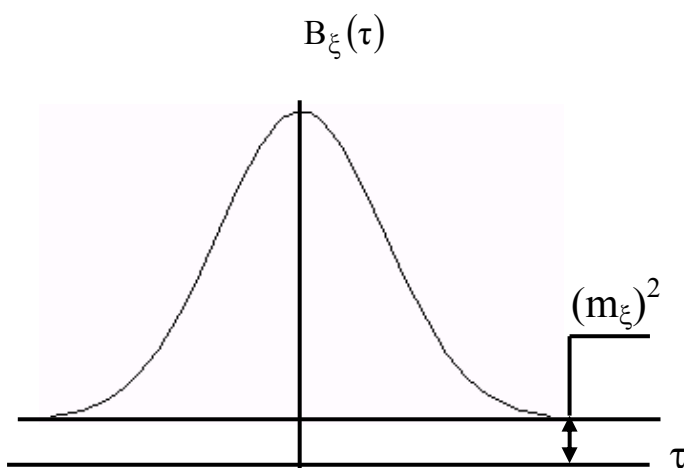


Рис. 1.8

Из определений стационарности в узком и широком смыслах можно заключить, что из

стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле, но из стационарности в широком смысле не всегда следует стационарность в узком смысле.

На практике многие задачи решаются только лишь с использованием моментных функций не выше второго порядка, т.е. иногда достаточно бывает знать функции распределения вероятностей не выше второго порядка. Поэтому раздел теории случайных процессов, использующий распределения вероятностей не выше второго порядка, называется корреляционной теорией.

Свойства ковариационной и корреляционной функций.

1. Ковариационная и корреляционная функции есть четные функции, т.е.

$$B_{\xi}(t_1, t_2) = B_{\xi}(t_2 - t_1) = B_{\xi}(t_1 - t_2) = B_{\xi}(\tau) = B_{\xi}(-\tau).$$

Это следует из определения ковариационной и корреляционной функций.

2. Для стационарного процесса имеем (рис. 1.8)

$$B_{\xi}(\tau) = B_{0\xi}(\tau) + m_{\xi}^2.$$

3. $B_{0\xi}(0) = D[\xi(t)].$

Для доказательства этого свойства рассмотрим ковариационную функцию $B_{0\xi}(\tau)$ при $\tau \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} B_{0\xi}(\tau) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} E[(\xi(t) - m_{\xi}(t))(\xi(t + \tau) - m_{\xi}(t + \tau))] = \\ &= E[(\xi(t) - m_{\xi}(t))^2] = D\xi(t). \end{aligned}$$

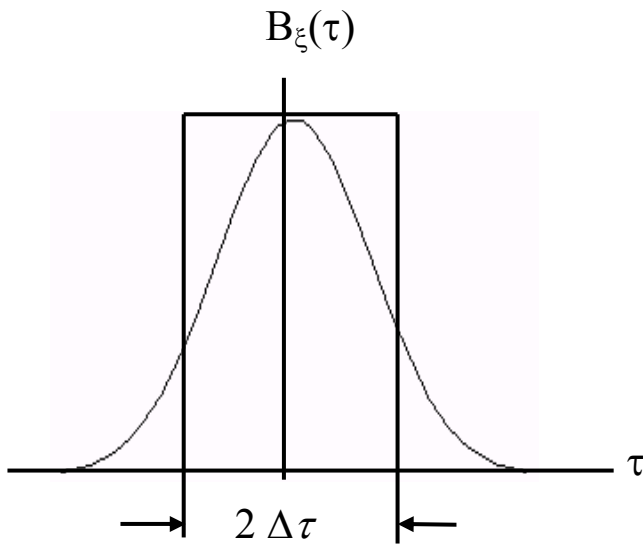


Рис. 1.9

4. Для любого значения τ имеем $B_{\xi}(0) \geq |B_{\xi}(\tau)|$.

5. Нормированная ковариационной функции $B_{0\xi}(\tau)$ относительно $B_{0\xi}(0) = D[\xi(t)]$:

$$\rho_{\xi}(\tau) = \text{corr}(\tau) = B_{0\xi}(\tau) / B_{0\xi}(0)$$

называется *коэффициентом корреляции случайного процесса*. Из пятого свойства следует,

что $|\rho_{\xi}(\tau)| \leq 1$.

6. На практике необходимо знать интервал времени $\Delta\tau$, в пределах которого нельзя пренебречь зависимостями между значениями случайного процесса. Этот интервал $\Delta\tau$ называется *интервалом корреляции*. Реализации, отстоящие по времени больше, чем интервал корреляции, считаются некоррелированными. Интервал корреляции может быть определен несколькими способами.

1) Площадь под кривой нормированной корреляционной функции $\rho_{\xi}(\tau)$ равна площади прямоугольника с основанием, равным $2\Delta\tau$, и высотой, равной единице (рис. 1.9)

$$\Delta\tau = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} B_{\xi}(\tau) d\tau}{2 B_{\xi}(0)} \quad (1.12)$$

2) Введем $R^*(\tau)$ – огибающую нормированной корреляционной функции и ρ – допустимый коэффициент корреляции, $0 < \rho < 1$,

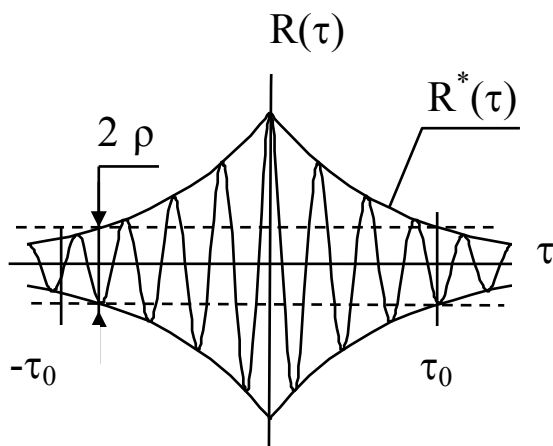


Рис.1.10

выбранный из практических соображений. Будем считать, (рис. 1.10), значения процесса $\xi(t)$ коррелированными на интервале времени $\Delta\tau$, где $\Delta\tau$ выбрано из решения равенства

$$|R^*(\tau_0)| = \rho : \Delta\tau = |\tau_0|.$$

Существуют и другие методы определения интервала корреляции.

Рассмотрим частный случай, когда время корреляции τ принимает дискретные значения $\tau = t_2 - t_1 = k \Delta t$. Установим связь между значениями коэффициента корреляции $R_\xi(\tau) = B_{0\xi}(\tau)/B_{0\xi}(0)$ случайного процесса $\xi(t)$ и коэффициентом корреляции R_{ij} системы случайных величин $\xi_1, \xi_1, \dots, \xi_n$, распределенных по одному и тому же закону с одинаковыми математическими ожиданиями и одинаковыми дисперсиями σ^2 .

Коэффициент корреляции R_{ij} является элементом корреляционной матрицы

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & R_{12} & \cdots & R_{1n} \\ R_{21} & 1 & \cdots & R_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{n1} & R_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

и вычисляется как

$$R_{ij} = \frac{E[(\xi_i - m)(\xi_j - m)]}{\sigma^2}. \quad (1.14)$$

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$ в дискретные моменты времени t_i и пусть $i = 0, 1, \dots, n-1$. Так как ковариационная функция процесса $\xi(t)$ рассматривается в дискретные моменты времени и на конечном интервале времени, равном $n \Delta t$, коэффициент корреляции случайного процесса $\xi(t)$ удобно представить через корреляционную матрицу

$$\mathbf{R}(\Delta t) = \begin{pmatrix} 1 & R(\Delta t) & R(2\Delta t) & \cdots & R((n-1)\Delta t) \\ R(\Delta t) & 1 & R(\Delta t) & \cdots & R((n-2)\Delta t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R((n-1)\Delta t) & R((n-2)\Delta t) & R((n-3)\Delta t) & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

$$\text{где } R(k\Delta t) = \frac{E[(\xi(t_2) - m)(\xi(t_1) - m)]}{\sigma^2}, \quad t_2 - t_1 = k.$$

Из сравнения элементов R_{ij} и $R(k\Delta t)$ корреляционных матриц \mathbf{R} и $\mathbf{R}(\Delta t)$, видно, что $R_{ij} = R(|i - j|\Delta t)$, т.е. значения коэффициента корреляции случайного процесса $\xi(t)$ в дискретные моменты времени совпадают со значениями коэффициента корреляции системы случайных величин $\xi_1, \xi_1, \dots, \xi_n$, если $\tau = |i - j|\Delta t$.

1.5. Характеристическая функция случайного процесса

Свойства случайного процесса можно описать не только плотностью распределения вероятностей и функцией распределения вероятностей, но и с помощью характеристической функции.

Рассмотрим случайную величину ξ , имеющую плотность распределения вероятностей $w_\xi(x)$ для непрерывной случайной величины и распределение вероятностей $P(\xi = x_k) = p_k$, $k = 1, 2, \dots$ для дискретной случайной величины. *Характеристической функцией* $\theta_\xi(v)$ случайной величины $e^{jv\xi}$ называется математическое ожидание случайной величины $e^{jv\xi}$:

$$\theta_\xi(v) = E[e^{jv\xi}] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} w_\xi(x) e^{jvx} dx & \text{для непрерывной сл. вел.} \\ \sum_k p_k e^{jvx_k} & \text{для дискретной сл. вел.,} \end{cases} \quad (1.16)$$

где v – произвольный вещественный параметр, $j = \sqrt{-1}$.

Обратное преобразование имеет вид

$$w_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_\xi(v) e^{-jvx} dv.$$

Приведем некоторые свойства характеристической функции случайной величины.

$$1. |\theta_\xi(v)| \leq 1.$$

Действительно,

$$|\theta_{\xi}(v)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} w_{\xi}(x) e^{jvx} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |w_{\xi}(x) e^{jvx}| dx = \int_{-\infty}^{\infty} w_{\xi}(x) dx = 1.$$

2. $\theta_{\xi}(0) = 1$, следует из определения характеристической функции.

$$3. \theta_{\xi}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{\xi}(x) \cos(vx) dx + j \int_{-\infty}^{\infty} w_{\xi}(x) \sin(vx) dx.$$

4. $\theta_{\xi}(-v) = \bar{\theta}_{\xi}(v)$ следует из пункта 3, где $\bar{\theta}_{\xi}(v)$ – функция, комплексно сопряжённая функции $\theta_{\xi}(v)$.

5. $\lim_{v \rightarrow \pm\infty} \theta_{\xi}(v) = 0$. Доказательство этого свойства приведено в [5].

6. Если плотность распределения вероятностей $w_{\xi}(x)$ симметричная функция, то характеристической функции $\theta_{\xi}(v)$ – действительная четная функция

$$\theta_{\xi}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{\xi}(x) \cos(vx) dx.$$

7. Если характеристическая функция $\theta_{\xi}(v)$ – действительная четная функция, то плотность распределения вероятностей $w_{\xi}(x)$ – симметричная функция.

Одним из удобств применения характеристической функции является легкость нахождения моментов распределения вероятностей. Продифференцируем $\theta_{\xi}(v)$:

$$\frac{d^k \theta_{\xi}(v)}{dv^k} = j^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k w_{\xi}(x) e^{jvx} dx \quad . \quad (1.17)$$

Из этого выражения получим моменты k -го порядка:

$$E[\xi^k] = \frac{1}{j^k} \left(\frac{d^k \theta_{\xi}(v)}{dv^k} \right)_{v=0} = m_{\xi k} .$$

Если существуют моменты любого порядка, то разложение характеристической функции в ряд Тейлора в точке $v = 0$ имеет вид

$$\theta_{\xi}(v) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_{\xi k}}{k!} (jv)^k . \quad (1.18)$$

На практике часто приходится сталкиваться с поиском функции и плотности распределения вероятностей суммы независимых случайных величин ξ_i с известными характеристическими функциями $\theta_{\xi_i}(v)$. Согласно определению (1.16) характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций, т.е.

$$\theta_{\xi}(v) = E[e^{jv\xi}] = E[e^{jv\sum_{i=1}^n \xi_i}] = \prod_{i=1}^n E[e^{jv\xi_i}] = \prod_{i=1}^n \theta_{\xi_i}(v) . \quad (1.19)$$

Формула (1.15) позволяет вычислить плотность распределения вероятностей суммы независимых случайных величин.

Другой функцией, которая характеризует моменты случайной величины, является *кумулянтная* функция. *Кумулянтной* функцией случайной величины ξ называется логарифм характеристической функции

$$\psi(v) = \ln \theta_{\xi}(v) . \quad (1.20)$$

Кумулянтная функция может быть разложена в ряд по степеням v в точке $v_0 = 0$. Для этого рассмотрим разложение функции $\ln(1+z)$ в ряд Тейлора в точке $z_0 = 0$:

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k}. \quad (1.21)$$

Сделаем подстановку $z = \theta_{\xi}(v) - 1$ и получим, используя (1.18) и (1.21),

$$\begin{aligned} \psi_{\xi}(v) = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_{\xi k}}{k!} (jv)^k - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_{\xi k}}{k!} (jv)^k \right)^2 + \\ & + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_{\xi k}}{k!} (jv)^k \right)^3 - \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_{\xi k}}{k!} (jv)^k \right)^4 + \dots \end{aligned}$$

Возведя в соответствующие степени выражения в круглых скобках и собрав все члены с одинаковыми степенями относительно членов jv , получим степенной ряд вида

$$\psi(v) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi_k}{k!} (jv)^k, \quad (1.22)$$

где коэффициенты разложения χ_k , называемые *кумулянтами* (семиинвариантами), являются полиномами от моментов $m_{\xi k}$, $k = 1, 2, 3, \dots$

В частности

$$\begin{aligned} \chi_1 = m_{\xi 1}, \quad \chi_2 = m_{\xi 2} - m_{\xi 1}^2 = E[\overset{o}{\xi}^2] = D\xi, \\ \chi_3 = m_{\xi 3} - 3m_{\xi 1}m_{\xi 2} + 2m_{\xi 1}^3 = E[\overset{o}{\xi}^3], \quad \chi_4 = E[\overset{o}{\xi}]^4 - 3(E[\overset{o}{\xi}^2])^2 \end{aligned} \quad (1.23)$$

Пример 1. Пусть случайная величина ξ распределена по нормальному закону с математическим ожиданием m_ξ и дисперсией σ_ξ^2 , $N(m_\xi, \sigma_\xi^2)$:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \exp\left[-\frac{(x - m_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2}\right], \quad |x| < \infty.$$

Характеристическая функция случайной величины ξ имеет вид

$$\theta_\xi(v) = e^{jvm_\xi - \frac{1}{2}\sigma_\xi^2 v^2},$$

а кумулянтная функция –

$$\psi_\xi(v) = jvm_\xi - \frac{1}{2}\sigma_\xi^2 v^2.$$

Пример 2. Рассмотрим сумму трех независимых нормально распределенных случайных величин $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, математические ожидания и дисперсии которых соответственно равны m_{ξ_1} , m_{ξ_2} , m_{ξ_3} , $\sigma_{\xi_1}^2$, $\sigma_{\xi_2}^2$, $\sigma_{\xi_3}^2$. Определим плотность распределения вероятностей $w_\xi(x)$.

Характеристические функции случайных величин ξ_i равны соответственно

$$\theta_{\xi_i}(v) = e^{jvm_i - \frac{1}{2}\sigma_{\xi_i}^2 v^2}$$

По формуле (1.19) вычислим характеристическую функцию случайной величины ξ

$$\theta_{\xi}(v) = \exp \left[\sum_{i=1}^3 (j v m_i - \frac{1}{2} \sigma_{\xi_i}^2 v^2) \right] = \exp \left[j v \sum_{i=1}^3 m_i - \frac{v^2}{2} \sum_{i=1}^3 \sigma_i^2 \right].$$

Введем обозначения $m_{\xi} = \sum_{i=1}^3 m_i$, $\sigma_{\xi}^2 = \sum_{i=1}^3 \sigma_i^2$.

Тогда характеристическая функция суммы случайных величин равна

$$\theta_{\xi}(v) = e^{j v m_{\xi} - \frac{1}{2} \sigma_{\xi}^2 v^2}.$$

Но полученная формула представляет характеристическую функцию нормально распределенной случайной величины с параметрами m_{ξ}, σ_{ξ}^2 .

Для многомерных случайных величин ξ_1, \dots, ξ_n можно также записать характеристическую функцию

$$\begin{aligned} \theta_{\xi}(v_1, \dots, v_n) &= E \left[e^{j \sum_{i=1}^n v_i \xi_i} \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w_{\xi}(x_1, \dots, x_n) e^{j \sum_{i=1}^n v_i x_i} dx_1 \dots dx_n \end{aligned} \quad (1.24)$$

Соответственно можно записать совместную плотность распределения вероятностей

$$w_{\xi}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \theta_{\xi}(v_1, \dots, v_n) e^{-j \sum_{i=1}^n v_i x_i} dv_1 \dots dv_n \quad (1.25)$$

Определение и свойства характеристической функции перенесем на случайный процесс

$$\theta_{\xi}(v, t) = E [e^{jv\xi(t)}] = \int_{-\infty}^{\infty} w_{\xi}(x, t) e^{jvx(t)} dx \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} \theta_{\xi}(v_1, \dots, v_n, t_1, \dots, t_n) &= E \left[e^{j \sum_{i=1}^n v_i \xi(t_i)} \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} L \int_{-\infty}^{\infty} w_{\xi}(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) e^{j \sum_{i=1}^n v_i x_i(t)} dx_1 \dots dx_n . \end{aligned} \quad (1.27)$$

Приведенные формулы позволяют исследовать свойства случайного процесса.

1.6. Дифференцирование и интегрирование случайного процесса

Понятие дифференцируемости и интегрируемости связано с непрерывностью функции. Для детерминированных функций функция $f(t)$ непрерывна в точке $t = t_0$, если существует предел $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$. Однако такой критерий непрерывности для случайного процесса непригоден, так как возможна не одна реализация, а целое множество реализаций для любого t .

Случайный процесс $\xi(t)$ называется непрерывным в точке t , если при любом $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что

$$\begin{aligned} E \left[|\xi(t+T) - \xi(t)|^2 \right] &< \varepsilon \quad \text{при } |T| < \delta \quad \text{или} \\ \lim_{T \rightarrow 0} E \left[|\xi(t+T) - \xi(t)|^2 \right] &= 0, \end{aligned} \quad (1.28)$$

Это есть условие сходимости в среднеквадратическом процесса $\xi(t+T)$ к процессу $\xi(t)$

Случайный процесс $\xi(t)$, непрерывный во всех точках $t \in \Omega_\xi$, где Ω_ξ – область, в которой существует случайный процесс, называется непрерывным в области Ω_ξ .

Рассмотрим, как влияет понятие непрерывности на математическое ожидание и ковариационную функцию.

$$\begin{aligned} E[|\xi(t+T) - \xi(t)|^2] &= E\left[\left|\overset{\circ}{\xi}(t+T) - \overset{\circ}{\xi}(t) + m_\xi(t+T) - m_\xi(t)\right|^2\right] = \\ &= E\left[\left|\overset{\circ}{\xi}(t+T) - \overset{\circ}{\xi}(t)\right|^2\right] + |m_\xi(t+T) - m_\xi(t)|^2. \end{aligned}$$

Как видно, из этого равенства и определения непрерывности, следует непрерывность центрированного случайного процесса и непрерывность математического ожидания.

Положим, $\xi(t)$ – непрерывный случайный процесс и рассмотрим разность ковариационных функций (*cov*)

$$\begin{aligned} B_{0\xi}(T+t_1, T+t_2) - B_{0\xi}(t_1, t_2) &= E\left[\overset{\circ}{\xi}(T+t_1)\overset{\circ}{\xi}(T+t_2) - \overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2)\right] = \\ &= E\left[\overset{\circ}{\xi}(T+t_1)\overset{\circ}{\xi}(T+t_2) - \overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(T+t_2) + \overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(T+t_2) - \overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2)\right] = \\ &= E\left[\left((\overset{\circ}{\xi}(T+t_1) - \overset{\circ}{\xi}(t_1))\overset{\circ}{\xi}(T+t_2)\right) + E(\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(T+t_2) - \overset{\circ}{\xi}(t_2))\right]. \end{aligned}$$

$$\text{Но } E\left[(\overset{\circ}{\xi}(T+t_1) - \overset{\circ}{\xi}(t_1))\overset{\circ}{\xi}(T+t_2)\right] \leq \sqrt{E\left[\left|\overset{\circ}{\xi}(T+t_1) - \overset{\circ}{\xi}(t_1)\right|^2\right]} E\left[\left|\overset{\circ}{\xi}(T+t_2)\right|^2\right],$$

$$E\left[\overset{\circ}{\xi}(t_1)(\overset{\circ}{\xi}(T+t_2) - \overset{\circ}{\xi}(t_2))\right] \leq \sqrt{E\left[\left|\overset{\circ}{\xi}(t_1)\right|^2\right]} E\left[\left|\overset{\circ}{\xi}(T+t_2) - \overset{\circ}{\xi}(t_2)\right|^2\right].$$

При уменьшении T в подкоренных выражениях значения корней стремятся к нулю. То есть из непрерывности случайного процесса в точке следует непрерывность ковариационной функции $B_{0\xi}(t_1, t_2)$. Верно и обратное утверждение: из непрерывности ковариационной функции следует непрерывность случайного процесса $\xi(t)$.

Дифференцирование случайного процесса. Случайный процесс $\xi(t)$ дифференцируем в точке t в среднеквадратическом смысле, если существует такая случайная функция $\eta(t)$ – производная в среднеквадратическом процесса $\xi(t)$ в точке t , что

$$\lim_{T \rightarrow 0} E \left[\left| \frac{\xi(t+T) - \xi(t)}{T} - \eta(t) \right|^2 \right] = 0, \eta(t) = \xi'(t) = \frac{d\xi(t)}{dt}. \quad (1.29)$$

Как видно из этой формулы, для существования производной в точке t требуется непрерывность случайного процесса в точке t .

Из дифференцируемости в среднеквадратическом следует дифференцируемость по вероятности

$$\lim_{T \rightarrow 0} P \left(\left| \frac{\xi(t+T) - \xi(t)}{T} - \xi'(t) \right| > \varepsilon \right) = 0, \xi'(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\xi(t+T) - \xi(t)}{T} \quad (1.30)$$

Математическое ожидание случайного процесса $\xi'(t)$ равно

$$E[\xi'(t)] = \lim_{T \rightarrow 0} E \left[\frac{\xi(t+T) - \xi(t)}{T} \right] = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{m_\xi(t+T) - m_\xi(t)}{T} = m'_\xi(t) \quad (1.31)$$

Если процесс $\xi(t)$ – стационарный, то $m'_\xi(t) = 0$.

Корреляционная функция производной:

$$B_{\xi'}(t_1, t_2) = \lim_{T \rightarrow 0} E \left[\frac{\xi(t_1 + T) - \xi(t_1)}{T} \frac{\xi(t_2 + T) - \xi(t_2)}{T} \right] = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{B_{\xi_T}(t_1, t_2)}{T^2}$$

где $\xi_T(t) = \xi(t+T) - \xi(t)$.

Для анализа $B_{\xi'}(t_1, t_2)$ вычислим $B_{\xi_T}(t_1, t_2)$ и произведем разложение её в ряд Тейлора, ограничившись вторыми производными

$$\begin{aligned}
B_{\xi_T}(t_1, t_2) &= E[(\xi(t_1+T) - \xi(t_1))(\xi(t_2+T) - \xi(t_2))] = E[\xi(t_1+T)\xi(t_2+T)] - \\
&- E[\xi(t_1)\xi(t_2+T)] - E[\xi(t_1+T)\xi(t_2)] + E[\xi(t_1)\xi(t_2)] = \\
&= B_{\xi}(t_1+T, t_2+T) - B_{\xi}(t_1, t_2+T) - B_{\xi}(t_1+T, t_2) + B_{\xi}(t_1, t_2) = \\
&= B_{\xi}(t_1, t_2) + T \left(\frac{\partial B_{\xi}}{\partial t_1} + \frac{\partial B_{\xi}}{\partial t_2} \right) + \frac{T^2}{2} \left(\frac{\partial^2 B_{\xi}}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial^2 B_{\xi}}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{\partial^2 B_{\xi}}{\partial t_2^2} \right) - \\
&- B_{\xi}(t_1, t_2) - T \frac{\partial B_{\xi}}{\partial t_2} - \frac{T^2}{2} \frac{\partial^2 B_{\xi}}{\partial t_2^2} - \\
&- B_{\xi}(t_1, t_2) - T \frac{\partial B_{\xi}}{\partial t_1} - \frac{T^2}{2} \frac{\partial^2 B_{\xi}}{\partial t_1^2} + B_{\xi}(t_1, t_2) + o(T^3)
\end{aligned}$$

Из этих выражений получим

$$B_{\xi'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 B_{\xi}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}. \quad (1.32)$$

Таким образом, условием дифференцируемости случайного процесса является существование и непрерывность второй смешанной производной случайного процесса. Для стационарного случайного процесса можно получить

$$B_{\xi'}(\tau) = \frac{d^2 B_{\xi}(\tau)}{d\tau^2}.$$

Интегрирование случайного процесса. Положим, случайный процесс $\xi(t)$ задан в области Ω_{ξ} . Разобьем эту область на интервалы точками и рассмотрим сумму

$$\sum_{k=1}^n g(v_k, t) \xi(v_k) (v_k - v_{k-1}),$$

где $g(v_k, t)$ – некоторая известная весовая функция. В частности, можно потребовать $g(v_k, t) = g(t)$ и $\int_{\Omega_{\xi}} g(t) dt = 1$.

Положим также, что существует некоторый случайный процесс $\eta(t)$. Случайный процесс $\xi(t)$ будет интегрируемым в *средне-квадратическом смысле*, если существует случайный процесс $\eta(t)$ такой, что

$$\lim_{\max(v_k - v_{k-1})} E \left[\left| \sum_{k=1}^n g(v_k, t) \xi(v_k) (v_k - v_{k-1}) - \eta(t) \right|^2 \right] = 0.$$

Случайный процесс $\eta(t)$ будет называться интегралом от случайного процесса $\xi(t)$ с весовой функцией $g(v, t)$ и обозначаться как

$$\eta(t) = \int_{\Omega_{\xi}} g(v, t) \xi(v) dv.$$

Например, в качестве весовой функции в интеграле Дюамеля имеем импульсную характеристику $g(v, t) = h(t - v)$.

Математическое ожидание и корреляционная функция процесса $\eta(t)$ будет иметь вид:

$$E[\eta(t)] = \int_{\Omega_\xi} g(v, t) E[\xi(v)] dv = \int_{\Omega_\xi} g(v, t) m_\xi(v) dv, \quad (1.34)$$

$$B_\eta(t_1, t_2) = \int_{\Omega_\xi} \int_{\Omega_\xi} g(v_1, t_1) g(v_2, t_2) B_\xi(v_1, v_2) dv_1 dv_2 \quad (1.35)$$

Стоит заметить, что интегрирование и дифференцирование случайных процессов является сложным разделом теории случайных процессов и для строгого изложения данной теории необходимо изучение дополнительного математического аппарата. Так, например, если траектория процесса не гладкая (показатель Гельдера меньше 1/2) для интегрирования нужна дополнительная информация -- для винеровского процесса, например, это площадь Леви $G(a, b)$. Существуют стохастические интегралы Ито, теория «шершавых траекторий» (rough path theory) и пр.[18].

1.7. Эргодические случайные процессы

Моментные функции случайного процесса определяются усреднением по ансамблю всех возможных реализаций. Но на практике имеется одна какая-то реализация $x^{(k)}(t)$ случайного процесса $\xi(t)$. Для изучения физического процесса возникает необходимость вычисления плотности распределения вероятностей какого либо параметра процесса, функции распределения и моментных функций процесса по одной реализации на интервале наблюдения $(0, T_H)$. Вероятностные характеристики (выборочные, частотные) случайного процесса, полученные по одной реализации процесса за ограничен-

ное время наблюдения T_n , будут *случайными*. Следовательно, необходим критерий, по которому можно было бы отождествить вероятностные характеристики случайного процесса, полученные по одной реализации, с характеристиками случайного процесса, вычисленных усреднением по ансамблю. Для выбора критерия предварительно рассмотрим сходимость по вероятности и сходимость в среднеквадратическом.

Положим, имеется последовательность случайных величин ξ_1, \dots, ξ_n и неслучайная величина m . Последовательность случайных величин ξ_1, \dots, ξ_n *сходится по вероятности* к величине m , если для любого $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n - m| > \varepsilon) = 0, \quad (1.36)$$

или $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n - m| \leq \varepsilon) = 1$.

Последовательность случайных величин ξ_1, \dots, ξ_n *сходится в среднеквадратическом* к величине m , если выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[(\xi_n - m)^2] = 0. \quad (1.37)$$

Если $m = E\xi = m_\xi$, то сходимость в среднеквадратическом означает стремление дисперсии случайной величины ξ_n к нулю, то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D[\xi_n] = 0. \quad (1.38)$$

Из сходимости в среднеквадратическом следует сходимость по вероятности. Действительно, согласно неравенству Чебышева

$$P(|\xi_n - m_\xi| > \varepsilon) \leq \frac{D\xi_n}{\varepsilon^2} \text{ для любого } \varepsilon > 0.$$

Рассмотрим случайные процессы, называемые эргодическими.

Определение. Случайный процесс называется эргодическим, если любая его вероятностная характеристика, полученная усреднением по времени одной единственной реализации, за достаточно большой промежуток времени, сходится по вероятности к соответствующей вероятностной характеристике, полученной усреднением по ансамблю.

Таблица 4.1.а

Средние по времени	Средние по ансамблю
$\langle \xi^{(k)}(t) \rangle = \frac{1}{T_H} \int_0^{T_H} \xi^{(k)}(t) dt$	$E[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x w(x) dx$
$\langle \xi^{(k)}(t) \rangle^2 = \frac{1}{T_H} \int_0^{T_H} (\xi^{(k)}(t))^2 dt$	$E[\xi^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 w(x) dx$
$\langle \xi^{(k)}(t) \xi^{(k)}(t + \tau) \rangle =$ $= \frac{1}{T_H} \int_0^{T_H} \xi^{(k)}(t) \xi^{(k)}(t + \tau) dt$	$B_{\xi}(\tau) =$ $= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2$

В таблицах 4.1.а и 4.1.б приведены некоторые числовые характеристики непрерывного и дискретного по времени случайного процесса, вычисленные по времени и по ансамблю. Из приведенных таблиц видно, что при вычислении среднего по времени используется произ-

вольная k -ая реализация случайного процесса и средние по времени $\langle \bullet \rangle$, где \bullet означает усредняемую величину, не зависят от времени t .

Следовательно, для того, чтобы сопоставить средние по времени и средние по ансамблю, необходимо рассматривать случайные процессы, стационарные, хотя бы в широком смысле.

Таблица 4.1.6

Средние по времени	Средние по ансамблю
$\langle \xi^{(k)}(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x^{(k)}[i]$	$E[\xi(t)] = \sum_{i=1}^N x[i] p(\xi(t) = x[i])$
$\left(\langle \xi^{(k)}(t) \rangle \right)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(x^{(k)}[i] \right)^2$	$E[\xi^2(t)] = \sum_{i=1}^N (x[i])^2 p(\xi(t) = x[i])$
$\langle \xi^{(k)}(j) \xi^{(k)}(j+m) \rangle = \langle B(m) \rangle = \frac{1}{N-m} \sum_{i=1}^{N-m} x^{(k)}[i] x^{(k)}[i+m],$ $j = 1, \dots, N-m$	$B_{\xi}(m) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0, i-j =m}^{N-1} x[i] x[j] \times p(x[i], x[j]), \quad m = 0, 1, \dots, N-1$

Эргодический случайный процесс содержится в множестве стационарных случайных процессов.

В качестве критерия эргодичности используем критерий сходимости в среднеквадратическом

$$\lim_{T_H \rightarrow \infty} D[\langle \bullet \rangle] = 0, \quad (1.39)$$

где $\langle \bullet \rangle$ – означает среднее по времени исследуемой величины.

Определим условие эргодичности случайного процесса по отношению к среднему по времени, используя критерий сходимости в среднеквадратическом.

Среднее по времени для непрерывного случайного процесса имеет вид (таблица 4.1.а)

$$\langle \xi^{(k)}(t) \rangle = \frac{1}{T_H} \int_0^{T_H} \xi^{(k)}(t) dt. \quad (1.40)$$

Определим математическое ожидание и дисперсию среднего по времени для k-ой реализации случайного процесса $\xi(t)$:

$$E[\langle \xi^{(k)}(t) \rangle] = \frac{1}{T_H} \int_0^{T_H} E[\xi^{(k)}(t)] dt = m_\xi, \quad (1.41)$$

$$D[\langle \xi^{(k)}(t) \rangle] = E[(\langle \xi^{(k)}(t) \rangle - m_\xi)^2]. \quad (1.42)$$

Формула (1.42) отражает среднеквадратическое отклонение среднего по времени от среднего по ансамблю. Если с увеличением времени наблюдения T_H дисперсия среднего по времени $D[\langle \xi^{(k)}(t) \rangle]$ стремится к нулю, то имеем среднеквадратическую сходимость и, согласно неравенству Чебышева, будем иметь сходимость по вероятности, что необходимо для эргодичности процесса по определению.

Таким образом, в качестве критерия эргодичности стационарного случайного процесса относительно среднего по времени принимается (1.39):

$$\lim_{T_H \rightarrow \infty} D[\langle \xi^{(k)}(t) \rangle] = 0.$$

Преобразуем выражение (1.42)

$$D[\langle \xi^{(k)}(t) \rangle] = E[\langle \xi^{(k)}(t) \rangle - m_\xi]^2 = E[\langle \xi^{(k)}(t_1) \rangle \langle \xi^{(k)}(t_2) \rangle] - m_\xi^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T_H^2} \int_0^{T_H} \int_0^{T_H} E[\xi^{(k)}(t_1) \xi^{(k)}(t_2)] dt_1 dt_2 - m_\xi^2 = \\
&= \frac{1}{T_H^2} \int_0^{T_H} \int_0^{T_H} B_\xi(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 - m_\xi^2 = \\
&= \frac{1}{T_H^2} \int_0^{T_H} \int_0^{T_H} (B_\xi(t_2 - t_1) - m_\xi^2) dt_1 dt_2 = \\
&= \frac{1}{T_H^2} \int_0^{T_H} \int_0^{T_H} B_{0\xi}(t_2 - t_1) dt_1 dt_2.
\end{aligned}$$

Согласно критерию эргодичности должно соблюдаться

$$\lim_{T_H \rightarrow \infty} D[\langle \xi^{(k)}(t) \rangle] = \lim_{T_H \rightarrow \infty} \frac{1}{T_H^2} \int_0^{T_H} \int_0^{T_H} B_{0\xi}(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 = 0. \quad (1.43)$$

Достаточным условием выполнения (1.43) является стремление ковариационной функции к нулю при $|t_2 - t_1| \rightarrow \infty$, т.е. с увеличением времени наблюдения статистическая связь между значениями случайного процесса должны ослабевать и через достаточно большой промежуток времени ими можно пренебречь. Упростим условие (1.43), для этого произведем преобразование координат

$$\begin{aligned}
\tau &= t_2 - t_1, & t_1 &= t_0 - \tau/2, \quad 0 \leq t_1 \leq T_H, \\
t_0 &= (t_2 + t_1)/2, & t_2 &= t_0 + \tau/2, \quad 0 \leq t_2 \leq T_H.
\end{aligned} \quad (1.44)$$

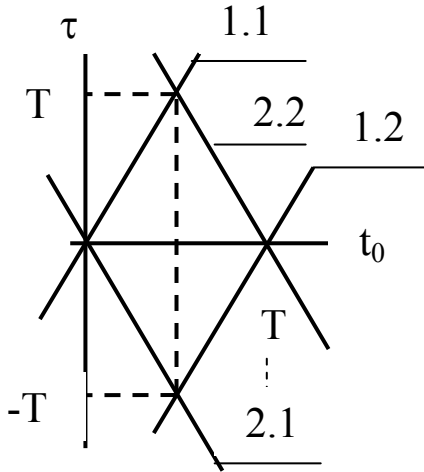


Рис. 1.11

Определим область интегрирования для переменных τ и t_0 (рис. 1.11). Из условия (1.44) имеем:

$$1. \quad 0 \leq t_0 - \tau/2 \leq T_H. \quad (1.45)$$

Согласно левой части неравенства (1.45) на плоскости (τ, t_0) имеем прямую 1.1. Соответственно для пра-

вой части неравенства (1.45) на плоскости (τ, t_0) имеем прямую 1.2.

2. Точно также согласно условию (1.44) должно выполняться

$$0 \leq t_0 - \tau/2 \leq T_H. \quad (1.46)$$

Левая часть неравенства (1.46) соответствует прямой 2.1 на плоскости (τ, t_0) . Правая часть неравенства (1.46) соответствует прямой 2.2 на плоскости (τ, t_0) . Область, ограниченная прямыми 1.1, 1.2, 2.1, 2.2, будет областью интегрирования для новых переменных τ, t_0 . Якобиан преобразования

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial t_1}{\partial t_0} & \frac{\partial t_1}{\partial \tau} \\ \frac{\partial t_2}{\partial t_0} & \frac{\partial t_2}{\partial \tau} \end{vmatrix} = 1.$$

Вычислим двойной интеграл (1.43)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T_H^2} \int_{T_H - T_H}^0 B_{0\xi}(\tau) \left(\int_{-\tau/2}^{T_H/2} dt_0 + \int_{T_H/2}^{T_H + \tau/2} dt_0 \right) d\tau + \frac{1}{T_H^2} \int_0^{T_H} B_{0\xi}(\tau) \left(\int_{\tau/2}^{T_H/2} dt_0 + \int_{T_H/2}^{T_H - \tau/2} dt_0 \right) d\tau = \\ & = \frac{1}{T_H^2} \int_{T_H - T_H}^0 B_{0\xi}(\tau) (T_H + \tau) d\tau + \frac{1}{T_H^2} \int_0^{T_H} B_{0\xi}(\tau) (T_H - \tau) d\tau = \\ & = \frac{1}{T_H - T_H} \int_{T_H - T_H}^{T_H} B_{0\xi}(\tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{T_H} \right) d\tau \leq \frac{1}{T_H - T_H} \int_{T_H - T_H}^{T_H} B_{0\xi}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Таким образом, для выполнения критерия $\lim_{T_H \rightarrow \infty} D[\langle \xi^k(t) \rangle] = 0$

достаточно выполнения условия

$$\lim_{T_H \rightarrow \infty} \frac{1}{T_H - T_H} \int_{T_H - T_H}^{T_H} B_{0\xi}(\tau) d\tau = 0, \quad (1.48)$$

которое называется *условием эргодичности Слуцкого*.

Если условие Слущкого выполняется, то процесс $\xi(t)$ можно считать эргодическим по отношению к среднему по времени и использовать среднее по времени $\langle \xi^{(k)}(t) \rangle$ для оценки математического ожидания $E[\xi(t)]$. Время наблюдения необходимо взять достаточно большим, но не настолько большим, чтобы нарушились условия, обеспечивающие стационарность исследуемого процесса.

Если рассматривается другая числовая характеристика, вычисленная по времени, скажем, корреляционная функция $\eta(\tau) = \langle \xi^{(k)}(t) \xi^{(k)}(t + \tau) \rangle$, то для применения условия Слущкого необходимо вычислить соответствующую ковариационную функцию и проверить выполнение условия (1.39). Для процесса $\eta(\tau)$ необходимо вычислить $B_{0\eta}(v)$. При выполнении условия

$$\lim_{T_H \rightarrow \infty} \frac{1}{T_H} \int_{-T_H}^{T_H} B_{0\eta}(v) dv = 0$$

можно говорить, что процесс $\xi(t)$ – эргодический по отношению к ковариационной функции процесса $\eta(\tau)$.

Пример 4.1. Пусть процесс $\xi(t)$ – стационарный случайный процесс с ковариационной функцией $B_{0\xi}(\tau) = m \cos \omega_0 \tau$. Доказать, что процесс $\xi(t)$ – эргодический процесс.

Ковариационная функция $B_{0\xi}(\tau) = B_{0\xi}(t_2 - t_1)$ при $|t_2 - t_1| \rightarrow \infty$ не стремится к нулю. Поэтому используем условие Слущкого

$$\frac{1}{T_H} \int_{-T_H}^{T_H} B_{0\xi}(\tau) d\tau = 2m \frac{\sin \omega_0 T_H}{\omega_0 T_H} \Big|_{T_H \rightarrow \infty} \rightarrow 0.$$

Условие Слущкого выполняется. Следовательно, процесс $\xi(t)$ – эргодический по отношению к среднему по времени.

Пример 4.2. Найти условие эргодичности по отношению к среднему по времени для случайного процесса $\eta(t) = k \xi(t) + Y + b$, где k – постоянная величина, не равная нулю, $\xi(t)$ – стационарный эргодический случайный процесс с $E[\xi(t)] = m_\xi$, $D[\xi(t)] = \sigma_\xi^2$, Y – случайная величина с $E[Y] = m_Y$, $D[Y] = \sigma_Y^2$, процесс $\xi(t)$ и величина Y – независимы, b – постоянная величина.

1. Вычислим $\overset{\circ}{\eta}(t) = k(\xi(t) - m_\xi) + (Y - m_Y) = k \overset{\circ}{\xi}(t) + \overset{\circ}{Y}$.

2. Вычислим $B_{0\eta}(t_1, t_2) = E[\overset{\circ}{\eta}(t_1) \overset{\circ}{\eta}(t_2)] =$
 $= k^2 B_{0\xi}(t_1, t_2) + \sigma_Y^2 = k^2 B_{0\xi}(t_2 - t_1) + \sigma_Y^2 = B_{0\eta}(t_2 - t_1).$

3. Из полученной формулы для ковариационной функции $B_{0\eta}(t_1, t_2)$ видно, что ковариационная функция с увеличением разности $|t_2 - t_1|$ стремится к постоянной величине σ_Y^2 , а не к нулю, как того требует условие эргодичности. Более того, если произвести проверку эргодичности процесса $\eta(t)$ по условию Слущкого, то увидим, что оно нарушается.

Следовательно, для того, чтобы процесс $\eta(t)$ был эргодическим необходимо отсутствие случайной величины Y . Тогда в выражении

для $B_{0\eta}(t_1, t_2)$ будет отсутствовать величина σ_Y^2 и процесс $\eta(t)$ будет эргодическим. Постоянные величины k и b не влияют на условие эргодичности исследуемого процесса.

Пример 4.3. Рассмотрим, как оценивается одномерная плотность распределения вероятности $w_\xi(x)$ случайного эргодического процесса $\xi(t)$ по одной единственной k -ой реализации $\xi^{(k)}(t)$, (рис. 1.12).

Преобразуем процесс $\xi(t)$ в новый процесс $\eta(t)$, который прини-

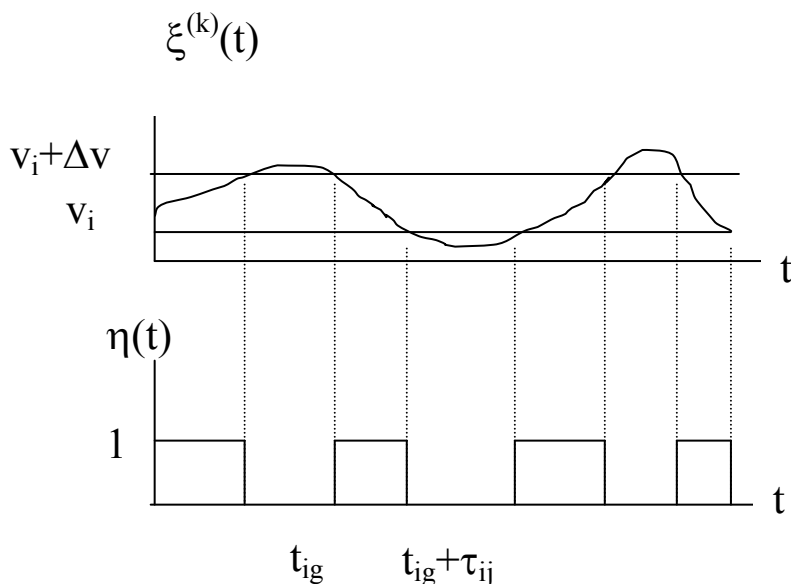


Рис.1.12

мает значения $y_0 = 0$, если процесс $\xi(t)$ не принадлежит интервалу $(v_i, v_i + \Delta v)$, и $y_1 = 1$, если процесс $\xi(t)$ находится в интервале $(v_i, v_i + \Delta v)$. В результате образуется последовательность единичных импульсов

$y^{(k)}(t)$, появляющихся в случайные моменты времени t_{ig} и со случайной длительностью τ_{ij} , (индекс i при моментах времени t_{ig} и τ_{ij} означает, что вычисляется распределение плотности вероятности для $v = v_i$):

$$y^{(k)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } v_i < \xi^{(k)}(t) \leq v_i + \Delta v \\ 0, & \text{если } v_i > \xi^{(k)}(t) \text{ или } \xi^{(k)}(t) > v_i + \Delta v. \end{cases}$$

Вычислим среднее по времени процесса $\eta(t)$:

$$\langle \eta^{(k)}(t) \rangle = \frac{1}{T_H} \int_0^{T_H} y^{(k)}(t) dt = \frac{1}{T_H} \sum_j \int_{t_{ig}}^{t_{ig} + \tau_{ij}} y^{(k)}(t) dt = \frac{1}{T_H} \sum_j \tau_{ij}.$$

Среднее по ансамблю процесса $\eta(t)$ равно

$$\begin{aligned} E[\eta(t)] &= 1 P(\eta(t) = 1) + 0 P(\eta(t) = 0) = P(v_i < \xi(t) \leq v_i + \Delta v) = \\ &= \int_{v_i}^{v_i + \Delta v} w(v) dv \approx w(v_i) \Delta v. \end{aligned}$$

Докажем, что процесс $\eta(t)$ эргодический. Рассмотрим ковариационную функцию процесса $\eta(t)$.

$$B_{0\eta}(t_1, t_2) = E[\eta(t_1), \eta(t_2)] - E[\eta(t_1)]E[\eta(t_2)].$$

Корреляционная функция процесса $\eta(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} B_{\eta}(t_1, t_2) &= E[\eta(t_1), \eta(t_2)] = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 y_i y_j P(\eta(t_1) = y_i, \eta(t_2) = y_j) \\ &= P(\eta(t_1) = 1, \eta(t_2) = 1) = \int_{v_i}^{v_i + \Delta v} \int_{v_i}^{v_i + \Delta v} w_{\xi}(v_1, v_2, t_2 - t_1) dv_1 dv_2. \end{aligned}$$

Подставим значения $B_{\eta}(t_1, t_2)$ и $E[\eta(t)]$ в $B_{0\eta}(t_1, t_2)$

$$\begin{aligned} B_{0\eta}(t_1, t_2) &= \int_{v_i}^{v_i + \Delta v} \int_{v_i}^{v_i + \Delta v} (w_{\xi}(v_1, v_2, t_2 - t_1) - w_{\xi}(v_1, t_1) w_{\xi}(v_2, t_2)) dv_1 dv_2 = \\ &= B_{0\eta}(t_2 - t_1). \end{aligned}$$

Как видно из предыдущего выражения, поведение ковариационной функции зависит от поведения совместной плотности распределения $w_{\xi}(v_1, v_2, t_2 - t_1)$ при $|t_2 - t_1| \rightarrow \infty$. Если статистическая связь между значениями v_1 и v_2 случайного процесса $\xi(t)$ исчезает при $|t_2 - t_1| \rightarrow \infty$, то

$$w_{\xi}(v_1, v_2, t_2 - t_1) \Big|_{|t_2 - t_1| \rightarrow \infty} = w_{\xi}(v_1, t_1) w_{\xi}(v_2, t_2),$$

и $B_{0\eta}(t_2 - t_1) \rightarrow 0$ при $|t_2 - t_1| \rightarrow \infty$, что является достаточным условием эргодичности процесса $\eta(t)$.

Учитывая, что процесс $\eta(t)$ – эргодический, при достаточно большом времени наблюдения T_H можно записать

$$\frac{1}{T_H} \sum_j \tau_{ij} \approx w(v_j) \Delta v \quad \text{или}$$

$$w(v_i) \approx \frac{1}{\Delta v T_H} \sum_j \tau_{ij}. \quad (1.49)$$

Разделив возможные значения v случайного процесса $\xi(t)$ на интервалы с шагом Δv , определим величину плотности распределения вероятностей для каждого i -го интервала при помощи (1.49).

1.8. Спектральная функция стационарного случайного процесса

При изучении спектральных свойств детерминированных процессов используется преобразование Фурье. Переход от временного представления процесса к частотному отображению позволяет исследовать амплитудные и фазовые характеристики процесса как функ-

цию частоты. Обратное преобразование Фурье позволяет восстановить исследуемый процесс.

Однако применить непосредственно преобразование Фурье к анализу случайных процессов невозможно, т.к. случайному процессу $\xi(t)$ соответствует множество возможных реализаций $x(t) = \xi^{(k)}(t)$ и для каждого из них можно применить преобразование Фурье. В результате нельзя однозначно отождествить обратное преобразование Фурье со случайным процессом $\xi(t)$. Поэтому для описания процесса $\xi(t)$ пользуются усредненной спектральной характеристикой.

Рассмотрим стационарный случайный процесс $\xi(t)$. Для каждой реализации $\xi^{(k)}(t)$ на интервале времени $(-T_H/2, T_H/2)$ найдем преобразование Фурье и рассчитаем квадрат модуля преобразования Фурье $F_{\xi T_H}(j\omega)$, приходящуюся на единицу полосы частот. Определим математическое ожидание квадрата модуля преобразования Фурье $F_{\xi T_H}(j\omega)$. Предел этой величины при $T_H \rightarrow \infty$ называют *спектральной плотностью мощности* $F_\xi(\omega)$ случайного процесса $\xi(t)$.

Покажем связь спектральной плотности $F_\xi(\omega)$ случайного процесса $\xi(t)$ с корреляционной функцией $B_\xi(\tau)$.

Пусть известна реализация $\xi^{(k)}(t)$ на интервале $(-T_H/2, T_H/2)$. Преобразование Фурье этой реализации имеет вид

$$F_{\xi T_H}(j\omega) = \int_{-T_H/2}^{T_H/2} \xi^{(k)}(t) \exp(-j\omega t) dt.$$

Рассмотрим квадрат модуля преобразования Фурье $F_{\xi T_H}(j\omega)$ данной реализации, приходящуюся на единицу полосы частот $1/T_H$

$$F_{\xi T_H}(\omega) = \frac{1}{T_H} |F_{\xi T_H}(j\omega)|^2.$$

Усреднив $F_{\xi T_H}(\omega)$ по всем возможным реализациям на интервале времени $(-\infty < t < \infty)$, получим спектральную плотность $F_\xi(\omega)$ случайного процесса $\xi(t)$:

$$F_\xi(\omega) = \lim_{T_H \rightarrow \infty} E[F_{\xi T_H}(\omega)] = \lim_{T_H \rightarrow \infty} E\left[\frac{1}{T_H} |F_{\xi T_H}(j\omega)|^2\right]. \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned} \text{Вычислим } E\left[\frac{1}{T_H} |F_{\xi T_H}(j\omega)|^2\right] &= \\ &= E\left[\frac{1}{T_H} \int_{-T_H/2}^{T_H/2} \int_{-T_H/2}^{T_H/2} \xi^{(k)}(t_1) \xi^{(k)}(t_2) e^{-j\omega(t_2-t_1)} dt_1 dt_2\right] = \\ &= \frac{1}{T_H} \int_{-T_H/2}^{T_H/2} \int_{-T_H/2}^{T_H/2} B_\xi(t_2 - t_1) e^{-j\omega(t_2-t_1)} dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

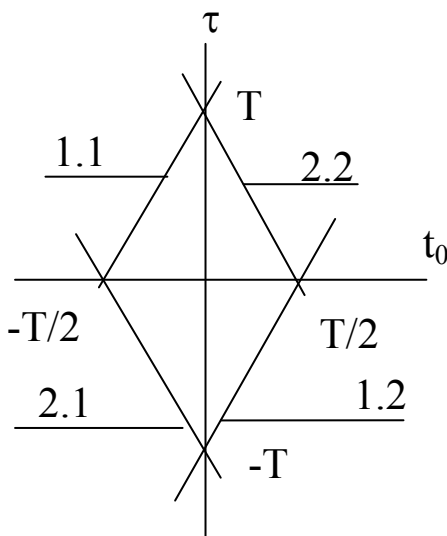


Рис. 1.13

Перейдем к новым координатам

(τ, t_0) :

$$\begin{aligned} \tau &= t_2 - t_1, & t_1 &= t_0 - \tau/2, \\ t_0 &= (t_2 + t_1)/2, & t_2 &= t_0 + \tau/2. \end{aligned}$$

В результате интегрирования по области, определяемую прямыми (1.1, 1.2, 2.1, 2.2), (рис. 1.13), получим

$$E\left[\frac{1}{T_H} |F_{\xi T_H}(j\omega)|^2\right] =$$

$$= \int_{-T_H}^{T_H} B_{\xi}(\tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{T_H}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Осуществим предельный переход ($T_H \rightarrow \infty$) и получим спектральную плотность мощности $F_{\xi}(\omega)$ случайного процесса $\xi(t)$

$$F_{\xi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{\xi}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.51)$$

Известно, что $\xi(t) = \overset{0}{\xi}(t) + m_{\xi}$ и $B_{\xi}(\tau) = B_{0\xi}(\tau) + m_{\xi}^2$. Подставим значение корреляционной функции в (1.51)

$$\begin{aligned} F_{\xi}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} B_{\xi}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} B_{0\xi}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau + m_{\xi}^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= F_{0\xi}(\omega) + m_{\xi}^2 \delta(\omega). \end{aligned} \quad (1.52)$$

Из (1.52) следует, что спектральная плотность нецентрированного случайного процесса имеет составляющую m_{ξ}^2 , характеризующую мощность постоянной составляющей случайного процесса. Если процесс центрированный, то

$$F_{0\xi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{0\xi}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1.53)$$

Функции $F_{\xi}(\omega)$ и $F_{0\xi}(\omega)$ являются преобразованиями Фурье от корреляционной и ковариационных функций $B_{\xi}(\tau)$ и $B_{0\xi}(\tau)$. Осуществляя обратные преобразования Фурье, получим

$$B_{\xi}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\xi}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad (1.54)$$

$$B_{0\xi}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{0\xi}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (1.55)$$

Пара преобразований (1.51), (1.54) и (1.53), (1.55) называются преобразованиями *Винера-Хинчина*.

Свойства спектральной плотности мощности.

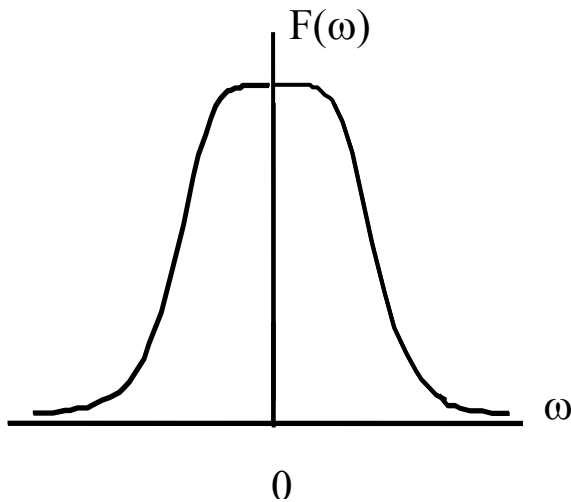


Рис. 1.14

1. Размерность спектральной плотности $\left[\frac{x^2}{\text{Гц}} \right]$, где x – размерность измеряемой величины. Если x – электрическое напряжение или электрический ток, то $F_\xi(\omega)$ называется *спектральной плотностью мощности* случайного процесса

$\xi(t)$, выделяемой на сопротивлении в 1 Ом, и имеет размерность $\left[\frac{\text{Вт}}{\text{Гц}} \right]$. В дальнейшем под случайным процессом $\xi(t)$ будем понимать величину случайного напряжения или случайного тока.

2. Спектральная плотность мощности $F_\xi(\omega)$ – неотрицательная функция, т.е. $F_\xi(\omega) \geq 0$, $-\infty < \omega < \infty$.

3. Спектральная плотность мощности $F_\xi(\omega)$ – функция четная, (Рис. 1.14), т.е. $F_\xi(-\omega) = F_\xi(\omega)$.

4. Как следствие четности, имеем

$$F_\xi(\omega) = 2 \int_0^{\infty} B_\xi(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

5. Мощность процесса $\xi(t)$ будет равна

$$P_{\xi} = B_{\xi}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\xi}(\omega) d\omega \quad (1.56)$$

6. Анализ спектральной плотности мощности, (рис. 1.15а), по частотам в интервале частот $-\infty < \omega < \infty$ очень удобен с математической точки зрения. Но в реальности физический смысл имеют частоты в интервале $0 \leq \omega < \infty$. Перейдем к определению спектральной,

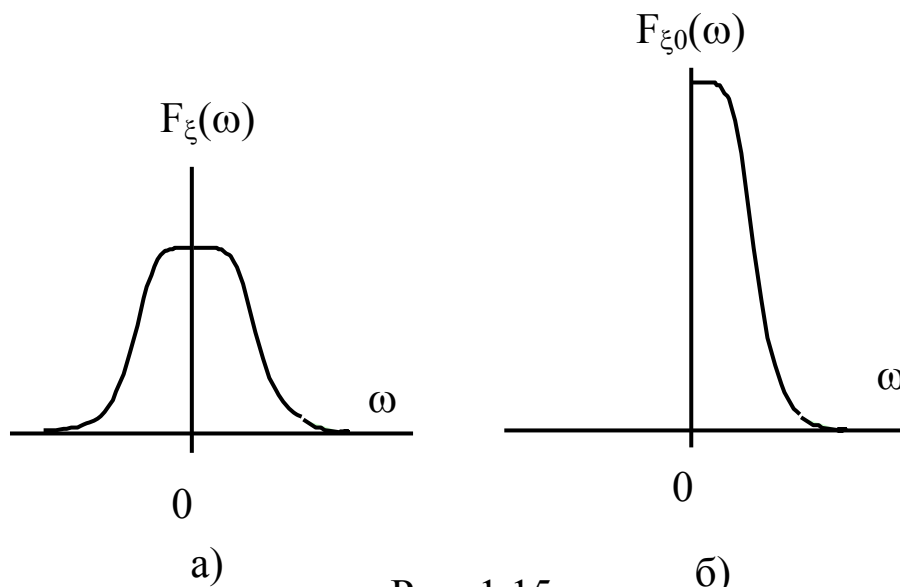


Рис. 1.15

плотности мощности $F_{\xi 0}(\omega)$, где частота ω изменяется в пределах $(0, \infty)$, (рис. 1.15б). В качестве критерия перехода от $F_{\xi}(\omega)$ к $F_{\xi 0}(\omega)$ выберем равенство площадей под кривыми $F_{\xi}(\omega)$ и $F_{\xi 0}(\omega)$, а также выполнение равенства $F_{\xi}(\omega) = k F_{\xi 0}(\omega)$, где k – постоянная величина.

Проведем вычисления

$$\begin{aligned}
 P_{\xi} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F_{\xi 0}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\xi}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 F_{\xi}(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F_{\xi}(\omega) d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F_{\xi}(-\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F_{\xi}(\omega) d\omega = 2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F_{\xi}(\omega) d\omega
 \end{aligned}$$

Спектральные плотности $F_{\xi 0}(\omega)$ и $F_{\xi}(\omega)$ совпадают по форме, но определены в разных интервалах частот. Тогда из предыдущей записи следует $F_{\xi 0}(\omega) = 2 F_{\xi}(\omega)$, $k=2$.

7. Ширина спектра процесса $\xi(t)$ характеризует сосредоточение мощности в некоторой полосе частот. Ширину спектра можно ввести

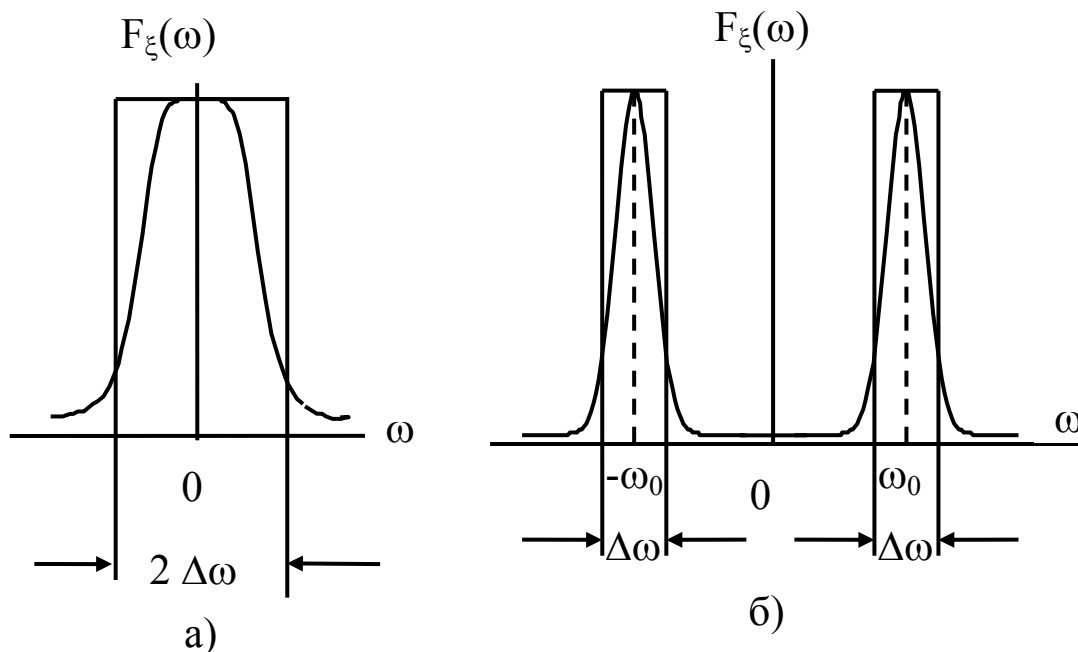


Рис. 1.16

различными способами.

7.1. Ширина спектра $\Delta\omega$ определяется из равенства площадей под кривой спектральной плотности мощности $F_\xi(\omega)$ и прямоугольника с основанием $2\Delta\omega$ и высотой, равной значению спектральной плотности мощности в точке $\omega = 0$, (рис. 1.16а), или

$\omega = \pm\omega_0$, (рис. 1.16б):

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_\xi(\omega) d\omega = \begin{cases} 2\Delta\omega F_\xi(0) & \text{рис.1.15а} \\ 2\Delta\omega F_\xi(\omega_0) & \text{рис.1.15б} \end{cases} \quad (1.57)$$

Откуда

$$\Delta\omega = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} F_\xi(\omega) d\omega}{2 F_\xi(\omega_0)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} F_{\xi 0}(\omega) d\omega}{2 F_{\xi 0}(\omega_0)} = \frac{\pi B_\xi(0)}{F_\xi(\omega_0)}.$$

Приравняв ω_0 нулю, получим интервал корреляции для случая, указанного на рисунке 1.16а

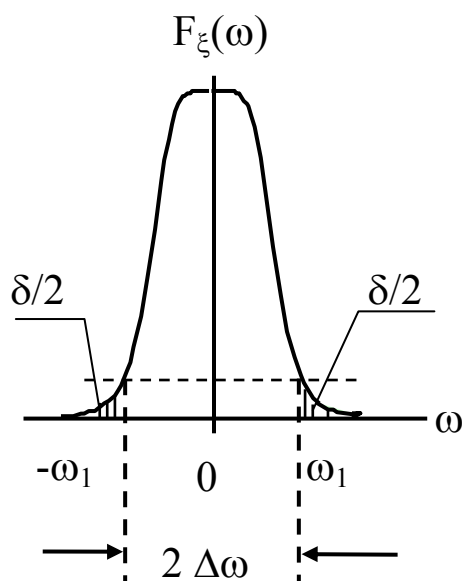


Рис.1.17

7.2. На практике можно установить относительную величину мощности δ , которой можно пренебречь, (рис.1.17), и, исходя из этого, решить уравнение относительно $\omega = \omega_1$.

$$\frac{\int_{\omega_1}^{\infty} F_{\xi 0}(\omega) d\omega}{\int_0^{\infty} F_{\xi 0}(\omega) d\omega} = \frac{\delta}{2}.$$

Интервал частот $(0, \omega_1)$ определяет ширину спектра $\Delta\omega$ случайного процесса в зависимости от представления спектральной плотности мощности.

7.3. По аналогии с математическим ожиданием и дисперсией можно записать среднюю частоту ω_0 и определить среднеквадратическую ширину спектра $\Delta\omega$, соответственно:

$$\omega_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega F_{\xi}(\omega) d\omega, \Delta\omega = \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 F_{\xi}(\omega) d\omega \right)^{1/2}.$$

Выбор того или иного метода определения ширины спектра случайного процесса зависит от решаемой задачи и экспериментатора.

8. Связь ширины спектра и интервала корреляции. Положим, ширина спектра и интервал корреляции определены по критерию равенства площадей прямоугольников и площадей под соответствующими кривыми (1.57), (1.12). Рассмотрим произведение

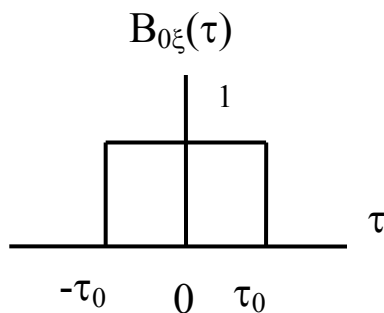
$$\Delta\tau \Delta\omega = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} B_{0\xi}(\tau) d\tau}{2 B_{0\xi}(0)} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} F_{0\xi}(\omega) d\omega}{2 F_{0\xi}(\omega_0)} = \frac{\pi}{2} \frac{F_{0\xi}(0)}{F_{0\xi}(\omega_0)}.$$

Если $\omega_0 = 0$, то $\Delta\tau \Delta\omega = \frac{\pi}{2}$ или $\Delta\tau \Delta f = \frac{1}{4}$, если $\omega_0 \neq 0$, то необхо-

димо осуществить преобразование координат вида $\nu = \omega - \omega_0$. В ре-

зультате, если пренебречь мощностью процесса в интервале частот (ω_0, ∞) , получим $\Delta\tau \Delta f = \frac{1}{4}$.

Пример 1. Положим, необходимо создать модель случайного процесса с ковариационной функцией вида, (рис. 1.18)



$$B_{0\xi}(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } |\tau| \leq \tau_0, \\ 0, & \text{если } |\tau| > \tau_0. \end{cases}$$

Возможно ли это осуществить?

Рис. 1.18

Рассчитаем спектральную плотность

мощности по (1.53), которая будет равна

$$F_{\xi}(\omega) = 2\tau_0 \frac{\sin \omega \tau_0}{\omega \tau_0}.$$

Ответ. Ввиду того, что функция $F_{\xi}(\omega)$ не может быть отрицательной, то процесс $\xi(t)$ с заданной ковариационной функцией создать невозможно.

Пример 2. Найти интервал корреляции, спектральную плотность мощности и ширину спектра случайного процесса, ковариационная функция которого равна

$$B_{0\xi}(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{\tau_0}, & \text{если } |\tau| \leq \tau_0, \\ 0, & \text{если } |\tau| > \tau_0. \end{cases}$$

Ответ. Интервал корреляции равен

$$\Delta\tau = \frac{1}{2} \left(\int_{-\tau_0}^0 \left(1 + \frac{\tau}{\tau_0} \right) d\tau + \int_0^{\tau_0} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0} \right) d\tau \right) = \frac{\tau_0}{2}.$$

Спектральная плотность мощности равна

$$F_{0\xi}(\omega) = \int_{-\tau_0}^0 \left(1 + \frac{\tau}{\tau_0} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_0^{\tau_0} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau = \tau_0 \left(\frac{\sin(\omega\tau_0/2)}{\omega\tau_0/2} \right)^2$$

Ширина спектра равна $\Delta\omega = \frac{1}{2F_{0\xi}(0)} \int_{-\infty}^{\infty} F_{0\xi}(\omega) d\omega = \frac{\pi}{\tau_0}$ или

$$\Delta f = \frac{1}{2\tau_0}.$$

Произведение интервала корреляции на ширину спектра равно

$$\Delta\tau \Delta f = \frac{1}{4}.$$

Единицы измерения $\Delta\tau$ и Δf в данном примере зависят от единиц измерения τ .

2. МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Прежде чем провести физический эксперимент или создать реальную радиосистему обычно моделируют исследуемое явление или моделируют процессы прохождения сигналов через определенные узлы системы. Для этого необходимо создать теоретические модели сигналов, которые могут быть описаны при помощи аппарата теории вероятностей и случайных процессов. Далее рассмотрим некоторые простейшие модели случайных процессов, наиболее часто применяемых на практике. Одной из основных задач при этом является определение многомерной функции распределения или плотности распределения, а также числовых характеристик исследуемого процесса.

2.1. Детерминированный процесс как случайный процесс

Рассмотрим неслучайный процесс $s(t)$, значения которого известны в любой момент времени с вероятностью 1, и запишем многомерную плотность распределения. Для этого используем δ -функцию, вводимую как

$$\int_a^b f(x - x_0) \delta(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } x_0 < a \text{ или } x_0 > b, \\ \frac{1}{2} f(x_0), & \text{если } x_0 = a \text{ или } x_0 = b, \\ f(x_0), & \text{если } a < x_0 < b \end{cases} \quad (2.1)$$

и обладающую свойством

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq x_0, \\ \infty, & \text{если } x = x_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\text{Из 2.1 следует, что } \int_a^b \delta(x) dx = 1 \quad (2.3)$$

Как видно из (2.2) и (2.3), δ -функция обладает свойствами плотности распределения, и её можно использовать как плотность распределения детерминированной величины, т.е. $w_s(x) = \delta(x - x_0)$, где x_0 – известное значение. Детерминированный процесс $s(t)$ в каждый момент времени принимает вполне определенные значения $s(t_1) = s_1, \dots, s(t_m) = s_m$. Поэтому многомерная плотность распределения будет иметь вид

$$w_s(x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_m) = \prod_{i=1}^m \delta(x_i - s_i).$$

Математическое ожидание равно самой измеряемой величине: $E[s(t)] = s(t)$.

Дисперсия, характеризующая разброс значений случайной величины около математического ожидания, равна нулю.

Следует различать процессы с бесконечно большой энергией, но ограниченной мощностью (например, гармонический сигнал) и процессы с ограниченной энергией. В первом случае корреляционную функцию вычисляют как

$$B_{sp}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) s(t + \tau) dt. \quad (2.4)$$

В частности для периодического процесса с периодом T_0 имеем

$$\begin{aligned}
B_{sp}(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t) s(t + \tau) dt = \\
&= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t) s(t + m T_0 + \tau) dt = B_{sp}(\tau + m T_0),
\end{aligned} \tag{2.5}$$

т.е. корреляционная функция периодического сигнала является периодической.

Во втором случае, когда сигнал ограничен интервалом времени (t_1, t_2) , корреляционная функция ищется как

$$B_s(\tau) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s(t) s(t + \tau) dt. \tag{2.6}$$

Пример 2.1. Определим корреляционную функцию гармонического сигнала $s(t) = U \cos(\omega_0 t)$.

$$B_{sp}(\tau) = \frac{U^2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos \omega_0 t \cos(\omega_0 (t + \tau)) dt = \frac{U^2}{2} \cos \omega_0 \tau.$$

2.2. Белый шум

Случайный процесс $\xi(t)$ называется *белым шумом*, если его спектральная плотность мощности постоянна на всех частотах:

$$F_\xi(\omega) = \frac{N_0}{2}, \quad -\infty < \omega < \infty. \tag{2.7}$$

Белый шум является идеализированной моделью случайного процесса, который хоть и не реализуется, но позволяет получать полезные результаты на практике.

Корреляционная функция белого шума, согласно (1.54), определяется как

$$B_{\xi}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau), \quad -\infty < \tau < \infty. \quad (2.8)$$

Из (2.2) видно, что любые два значения реализации белого шума (сколь угодно близкие по времени) не коррелированы.

Другим примером случайного процесса с постоянной спектральной плотностью мощности является *квазибелый шум*:

$$F_{\xi}(\omega) = \frac{N_0}{2}, \quad -\omega_m < \omega < \omega_m. \quad (2.9)$$

Корреляционная функция квазибелого шума определяется как

$$B_{\xi}(\tau) = \frac{N_0 \omega_m}{2\pi} \left(\frac{\sin \omega_m \tau}{\omega_m \tau} \right) = N_0 f_m \left(\frac{\sin 2\pi f_m \tau}{2\pi f_m \tau} \right), \quad -\infty < \tau < \infty. \quad (2.10)$$

Модели белого и квазибелого шума удобны при анализе цепей, на вход которых подаётся шум с полосой, превышающей полосу пропускания исследуемой системы.

2.3. Нормальный случайный процесс

Случайный процесс $\xi(t)$ называется нормальным, если его многомерная плотность распределения вероятностей описывается как

$$w(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma_{\xi_1} \dots \sigma_{\xi_n} \sqrt{D}} \text{Exp} \left(-\frac{1}{2D} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} \frac{x_i - m_{\xi_i}}{\sigma_{\xi_i}} \frac{x_j - m_{\xi_j}}{\sigma_{\xi_j}} \right), \quad (2.11)$$

где D – определитель нормированной ковариационной матрицы

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & R(t_1, t_2) & \dots & R(t_1, t_n) \\ R(t_2, t_1) & 1 & \dots & R(t_2, t_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ R(t_n, t_1) & R(t_n, t_2) & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & 1 & \dots & R_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

с коэффициентами ковариации

$$R_{ij} = \frac{E[(\xi(t_i) - m_{\xi_i})(\xi(t_j) - m_{\xi_j})]}{\sigma_{\xi_i} \sigma_{\xi_j}}, \quad (2.13)$$

математическим ожиданием $m_{\xi_i} = E[\xi(t_i)]$ и дисперсией $\sigma_{\xi_i}^2 = D[\xi(t_i)]$,

D_{ij} – алгебраическое дополнение к элементу R_{ij} ковариационной матрицы \mathbf{R} .

Введем матрицу \mathbf{K} с элементами $K_{ij} = \sigma_{\xi_i} \sigma_{\xi_j} R_{ij}$, тогда совместная плотность распределения вероятностей (2.6) запишется как

$$w_{\xi}(x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_m) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\text{Det } \mathbf{K}}} \times \\ \times \exp \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{X}' - \mathbf{E}[\xi'(t)]) \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{E}[\xi(t)]) \right), \quad (2.14)$$

где $\mathbf{X}' = (x_1, \dots, x_n) = (x(t_1), \dots, x(t_n))$ – транспонированный вектор значений случайного процесса в дискретные моменты времени t_1, \dots, t_n ,

$E[\xi'(t)] = (E[\xi(t_1)], \dots, E[\xi(t_n)]) = (m_{\xi_1}, \dots, m_{\xi_n})$ – транспонированный вектор значений математического ожидания в дискретные моменты времени t_1, \dots, t_n , $\text{Det } K$ – определитель матрицы K .

В частности, одномерная и двумерная плотности распределения вероятностей имеют вид

$$w_{\xi}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\xi}(t)} e^{-\frac{(x-m_{\xi}(t))^2}{2\sigma_{\xi}^2(t)}},$$

$$w_{\xi}(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\xi_1}\sigma_{\xi_2}\sqrt{1-r^2}} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(x_1-m_{\xi_1})^2}{\sigma_{\xi_1}^2} - 2r\frac{(x_1-m_{\xi_1})(x_2-m_{\xi_2})}{\sigma_{\xi_1}\sigma_{\xi_2}} + \frac{(x_2-m_{\xi_2})^2}{\sigma_{\xi_2}^2}\right)\right),$$

где $m_{\xi_i} = m_{\xi}(t_i)$, $\sigma_{\xi_i} = \sigma_{\xi}(t_i)$, $i = 1, 2$, $r = R_{12} = R_{21} = r(t_1, t_2)$.

Положим, процесс $\xi(t)$ – стационарный хотя бы в широком смысле. Тогда коэффициент корреляции равен $r = r(t_2 - t_1)$ и двумерная плотность распределения вероятностей примет вид

$$w_{\xi}(x_1, x_2, t_2 - t_1) = w_{\xi}(x_1, x_2, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-r^2}} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2(1-r^2)}\left((x_1-m)^2 - 2r(x_1-m)(x_2-m) + (x_2-m)^2\right)\right). \quad (2.15)$$

Если значения стационарного случайного процесса не коррелированы, то корреляционный момент равен нулю и плотность распределения вероятностей равна

$$w_{\xi}(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{(2\pi\sigma_{\xi}^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{\xi}^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m_{\xi})^2\right) = \prod_{i=1}^n w_{\xi}(x_i, t_i). \quad (2.16)$$

Если нормальный случайный процесс стационарен в широком смысле, то он будет стационарным и в узком смысле. Покажем это. Из формулы (2.11) получим

$$w_{\xi}(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma_{\xi}^n \sqrt{D}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{\xi}^2 D} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} (x_i - m_{\xi})(x_j - m_{\xi})\right). \quad (2.17)$$

Как видно из (2.6) и (2.17) совместная плотность распределения вероятностей $w_{\xi}(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$ зависит от нормированной ковариационной матрицы \mathbf{R} . Для стационарного процесса в широком смысле она будет равна

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & R(t_1 - t_2) & \dots & R(t_1 - t_n) \\ R(t_2 - t_1) & 1 & \dots & R(t_2 - t_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ R(t_n - t_1) & R(t_n - t_2) & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Если сдвинуть все точки отсчёта по времени на одну и ту же величину τ , $(t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau)$, то элементы нормированной ковариационной матрицы не изменятся, и многомерная плотность распределения не будет зависеть от сдвига τ . Отсюда следует, если нормальный случайный процесс стационарен в широком смысле, то он будет стационарным и в узком смысле.

Как видно из выше изложенного, нормальный случайный процесс содержит в качестве параметров математическое ожидание и ковариационную матрицу.

2.4. Каноническое разложение случайного процесса

Анализ случайных процессов при их прохождении через радиотехнические цепи бывает сложным из-за математических трудностей. На практике пользуются методами, упрощающими вычислительный процесс. Одним из этих методов является каноническое разложение случайного процесса.

Вводится элементарный случайный процесс $\xi_0(t) = V \varphi(t)$, где V – случайная величина, $\varphi(t)$ – не случайная функция времени, называемая координатной функцией. Определим математическое ожидание и корреляционную функцию процесса $\xi_0(t)$:

$$E[\xi_0(t)] = m_v \varphi(t), \quad B_{\xi_0}(t_1, t_2) = E[\xi_0(t_1)\xi_0(t_2)] = E[V^2] \varphi(t_1)\varphi(t_2),$$

ковариационная функция равна

$$B_{\xi_0}^o(t_1, t_2) = E[\xi_0^o(t_1)\xi_0^o(t_2)] = (E[V^2] - m_v^2) \varphi(t_1)\varphi(t_2).$$

Как видно из этих выражений, в общем виде элементарный случайный процесс не является стационарным хотя бы в широком смысле.

Представим случайный процесс $\xi(t)$ через элементарные случайные процессы

$$\xi(t) = m_{\xi}(t) + \sum_{i=1}^N V_i \varphi_i(t), \quad (2.19)$$

где $m_{\xi}(t)$ – не случайная функция, V_i – коэффициенты разложения – некоррелированные случайные величины с математическим ожиданием, равным нулю и дисперсией $\sigma_{V_i}^2$:

$$E[V_i V_j] = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq i, \\ D[V_i] = \sigma_{V_i}^2 & \text{при } j = i. \end{cases} \quad (2.20)$$

Множество координатных функций может быть как конечным, так и бесконечным. Представление случайного процесса в виде (2.19) с ограничениями (2.20) называется *каноническим разложением* случайного процесса. Для центрированного процесса $\hat{\xi}(t) = \xi(t) - m_{\xi}(t)$ имеем

$$\hat{\xi}(t) = \sum_{i=1}^N V_i \varphi_i(t). \quad (2.21)$$

Возможно интегральное представление

$$\xi(t) = m_{\xi}(t) + \int_{\Omega_{\xi}} V(\tau) \varphi(t, \tau) d\tau, \quad (2.22)$$

где $V(\tau)$ – белый шум с математическим ожиданием $E[V(\tau)] = 0$,

$\varphi(t, \tau)$ - неслучайная функция времени t и параметра τ .

Такое представление случайного процесса называется *интегральным каноническим разложением*.

Будем полагать в дальнейшем в этом разделе, что процесс $\xi(t)$ – центрированный, т.е. $\xi(t) = \overset{0}{\xi}(t)$, и выразим корреляционную функцию процесса $\xi(t)$, используя каноническое разложение:

$$\begin{aligned} B_{\xi}(t_1, t_2) &= E[\xi(t_1)\xi(t_2)] = E\left[\sum_{i=1}^N V_i \varphi_i(t_1) \sum_{j=1}^N V_j \varphi_j(t_2)\right] = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E[V_i V_j] \varphi_i(t_1) \varphi_j(t_2) = \sum_{i=1}^N E[V_i^2] \varphi_i(t_1) \varphi_i(t_2) = \\ &= \sum_{i=1}^N D[V_i] \varphi_i(t_1) \varphi_i(t_2) . \end{aligned} \quad (2.23)$$

Разложение (2.23) называется каноническим разложением ковариационной функции. Дисперсия процесса $\xi(t)$, выраженная через координатные функции, имеет вид

$$D(\xi) = B_{\xi}(t_1 = t_2) = \sum_{i=1}^N D[V_i] \varphi_i^2(t_1) . \quad (2.24)$$

Доказано [7], если ковариационная функция случайного процесса $\xi(t)$ имеет вид (2.23), то случайный процесс $\xi(t)$ может быть представим в виде (2.21). На практике часто применяют это утверждение. Выбор координатных функций $\varphi_i(t)$ зависит от свойств случайного процесса $\xi(t)$ и набора известных случайных величин V_1, V_2, \dots, V_N . Более подробно теория и практика канонического разложения случайной функции изложена в [7].

Рассмотрим стационарный случайный процесс $\xi(t)$ в интервале $(0, T_H)$. Корреляционная функция $B_\xi(\tau)$ может быть представлена разложением в ряд Фурье на интервале $(-T_H \leq \tau \leq T_H)$:

$$B_\xi(\tau) = B_\xi(t_2 - t_1) = D_0 + \sum_{i=1}^{\infty} D_i \cos \omega_i \tau = ,$$

$$= D_0 + \sum_{i=1}^{\infty} D_i \cos(\omega_i (t_2 - t_1)), \quad \omega_i = i \omega_0 = i \frac{\pi}{T_H}.$$

(2.24)

Коэффициенты разложения определяются как

$$D_0 = \frac{1}{2T_H} \int_{-T_H}^{T_H} B_\xi(\tau) d\tau, \quad (2.25)$$

$$D_i = \frac{1}{T_H} \int_{-T_H}^{T_H} B_\xi(\tau) \cos \omega_i \tau d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, \infty \quad (2.26)$$

Перепишем выражение (2.24) в виде

$$B_\xi(t_2 - t_1) = D_0 + \sum_{i=1}^{\infty} D_i \cos(\omega_i (t_2 - t_1)) =$$

$$= D_0 + \sum_{i=1}^{\infty} D_i \cos \omega_i t_1 \cos \omega_i t_2 + \sum_{i=1}^{\infty} D_i \sin \omega_i t_1 \sin \omega_i t_2. \quad (2.27)$$

В результате получили разложение ковариационной функции случайного процесса $\xi(t)$ по координатным функциям $\cos \omega_i t$ и $\sin \omega_i t$ на интервале $(-T_H, T_H)$. Ввиду взаимной однозначности представления канонического разложения случайного процесса $\xi(t)$ и его ковариационной функции имеем

$$\xi(t) = U_0 + \sum_{i=1}^{\infty} U_i \cos \omega_i t + \sum_{i=1}^{\infty} V_i \sin \omega_i t, \quad (2.28)$$

где U_0, U_i, V_i – не коррелированные случайные величины с математическими ожиданиями и дисперсиями соответственно

$$E[U_0] = E[U_i] = E[V_i] = 0,$$

$$D[U_0] = D_0, D[U_i] = D[V_i] = D_i.$$

Представление (2.28) называется *спектральным разложением* случайного процесса $\xi(t)$ на интервале $(0, T_H)$. Наличие случайной величины U_0 свидетельствует о том, что процесс $\xi(t)$ не является эргодическим, так как нарушается условие эргодичности Слущкого. Если коэффициент D_0 в (2.28) будет равен нулю, то процесс $\xi(t)$ будет эргодическим.

2.5. Квазидетерминированный случайный процесс

Случайный процесс $\xi(t, A, \Omega, \Phi)$ называется *квазидетерминированным*, если он описывается неслучайной функцией времени, содержащий в качестве параметра одну или несколько случайных величин с известными совместными плотностями распределения вероятностей.

Случайность проявляется в том, что в момент начала отсчета случайные параметры принимают одно из своих возможных значений и в дальнейшем не изменяются во время наблюдения процесса, т.е. процесс в дальнейшем будет детерминированным. Многомерная плотность распределения вероятностей зависит от распределения ве-

роятностей в момент $t = t_1$. Выразим многомерную плотность распределения вероятностей квазидетерминированного процесса через одномерную плотность и условную плотности распределения вероятностей:

$$\begin{aligned} w_{\xi}(y_1, \dots, y_n, t_1, \dots, t_n) &= \\ &= w_{\xi}(y_1, t_1) w_{\xi}(y_2, \dots, y_n, t_2, \dots, t_n | y_1, t_1) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Положим, что найдена одномерная плотность распределения $w_{\xi}(y_1, t_1)$. Ввиду того, что значения случайных величин в моменты времени t_2, \dots, t_n известны и неизменны, то можно использовать δ -функцию для описания условной плотности распределения $w_{\xi}(y_2, \dots, y_n, t_2, \dots, t_n | y_1, t_1)$:

$$w_{\xi}(y_2, \dots, y_n, t_2, \dots, t_n | y_1, t_1) = \prod_{i=2}^n \delta(y_i - Q(t_i | y_1, t_1)),$$

где $Q(t_i | y_1, t_1)$ – функция, описывающая процесс $\xi(t)$ в моменты времени $t \geq t_2$ при условии, что значение процесса в момент $t = t_1$ известно.

Пример 2.1. Случайный процесс $\xi(t) = A \cos(\Omega t + \Phi)$ содержит случайные величины амплитуду A , частоту Ω и фазу Φ , не зависящие от времени. Для простоты будем считать амплитуду A случайной величиной с известной плотностью распределения $w_A(x)$, $x_1 < x \leq x_2$, а частоту и фазу будем считать известными, т.е. $\Omega = \omega$, $\Phi = 0$, $\xi(t) = A \cos \omega t$. Случайный процесс принимает значения $y(t) = x \cos \omega t$. В момент времени $t = t_1$ имеем $y(t_1) = x \cos \omega t_1$, и

амплитуда сигнала будет равна $x = \frac{y(t_1)}{\cos \omega t_1}$. Одномерная плотность

распределения $w_\xi(y_1, t_1)$ будет равна

$$w_\xi(y_1, t_1) = w_A\left(\frac{y_1}{\cos \omega t_1}\right) \left| \frac{dx}{dy_1} \right| = w_A\left(\frac{y_1}{\cos \omega t_1}\right) \frac{1}{|\cos \omega t_1|}.$$

Функция $Q(t_i | y_1, t_1)$ равна:

$$Q(t_i | y_1, t_1) = \frac{y(t_1)}{\cos \omega t_1} \cos \omega t_i.$$

Таким образом, многомерная плотность распределения примет вид

$$\begin{aligned} w(y_1, \dots, y_n, t_1, \dots, t_n) = \\ = w_A\left(\frac{y(t_1)}{\cos \omega t_1}\right) \frac{1}{|\cos \omega t_1|} \prod_{i=2}^n \delta\left(y_i - \frac{y(t_1)}{\cos \omega t_1} \cos \omega t_i\right). \end{aligned}$$

2.6. Узкополосный случайный процесс

По свойствам спектральной плотности мощности случайные процессы могут быть разделены на широкополосные и узкополосные. Случайный процесс $\xi(t)$ называется узкополосным, если его спектральная плотность мощности сосредоточена вблизи какой-либо частоты, (рис 2.1). Другими словами, узкополосный процесс характеризуется полосой частот $\Delta\omega_0$, в пределах которой сосредоточена основная мощность процесса по отношению к частоте ω_0 , т.е. признаком узкополосности процесса является соотношение $\Delta\omega \ll \omega_0$.

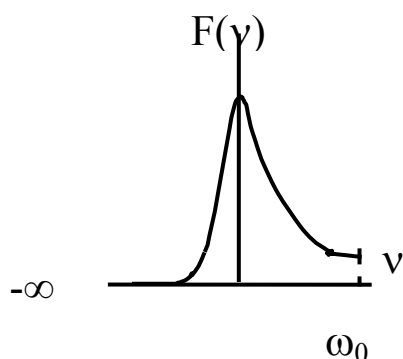
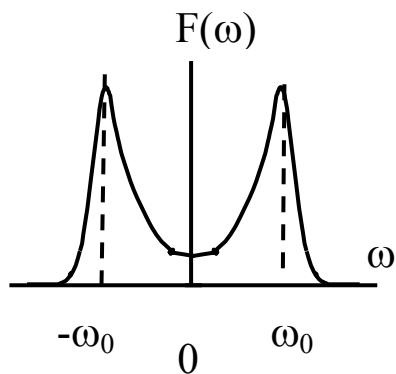


Рис. 2.1

Определим ковариационную функцию процесса, исходя из определения. Считаем, что спектральная плотность мощности $F(\omega)$ известна

$$B(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(-j\omega\tau) d\omega.$$

Перейдем к полосе частот в пределах $(0, \infty)$

$$B(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F_0(\omega) \cos \omega\tau d\omega,$$

сделаем зеркальное отображение спектральной плотности мощности по отношению к точке ω_0 и переместим начало координат в точку ω_0 при помощи преобразования $v = \omega_0 - \omega$, (рис. 2.1). Это преобразование позволяет рассматривать спектральную плотность мощности в области низких частот.

В результате получим

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\omega_0} F_0(v) \cos(\omega_0 - v)\tau dv = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\omega_0} F_0(v) \cos v\tau dv \right) \cos \omega_0\tau + \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\omega_0} F_0(v) \sin v\tau dv \right) \sin \omega_0\tau. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$a_c(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\omega_0} F_0(v) \cos v\tau \, dv; \quad a_s(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\omega_0} F_0(v) \sin v\tau \, dv. \quad (2.30)$$

Функции $a_c(\tau)$ и $a_s(\tau)$ - медленно меняющиеся функции времени, так как их спектры принадлежат низкочастотной области.

В новых обозначениях имеем

$$B(\tau) = a_c(\tau) \cos \omega_0 \tau + a_s(\tau) \sin \omega_0 \tau = a(\tau) \cos(\omega_0 \tau - \varphi(\tau)), \quad (2.31)$$

где $a_c(\tau) = a(\tau) \cos \varphi(\tau)$, $a_s(\tau) = a(\tau) \sin \varphi(\tau)$.

$$a(\tau) = \sqrt{(a_c(\tau))^2 + (a_s(\tau))^2}, \quad \varphi(\tau) = \arctan \left(\frac{a_s(\tau)}{a_c(\tau)} \right).$$

Как видно из (2.30) и (2.31), корреляционная функция узкополосного процесса является гармоническим колебанием с частотой ω_0 , модулированным низкочастотным сигналом $a(\tau)$, фаза гармонического колебания $\varphi(\tau)$ зависит от τ .

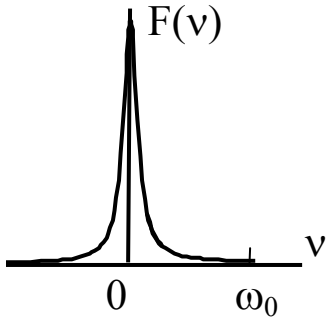


Рис. 2.2

На практике обычно спектральная плотность мощности $F(v)$ бывает симметричной функцией (рис. 2.2). В этом случае, если пренебречь мощностью процесса в области (ω_0, ∞) , синусная составляющая $a_s(\tau)$ обратит-

ся в нуль и получим простое выражение $B(\tau) = a_c(\tau) \cos \omega_0 \tau$.

В частности, если спектральная плотность мощности определяется как (рис 2.3а, $f_0 = 50$ Гц, $\alpha = 30$ 1/Сек)

$$F(\omega) = \frac{2\alpha(\alpha^2 + \omega^2 + \omega_0^2)}{(\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2)(\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2)}, \quad |\omega| < \infty,$$

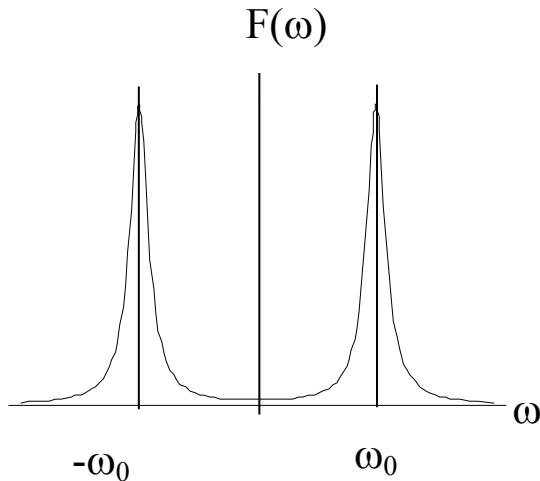


Рис. 2.3а

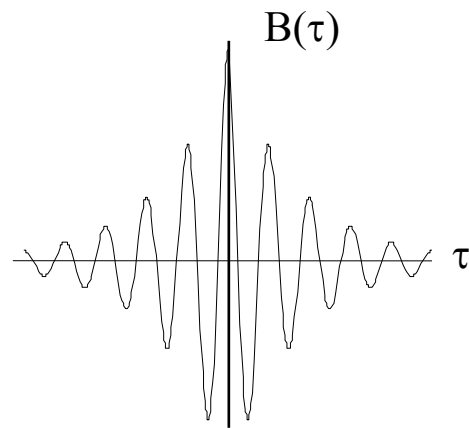


Рис. 2.3б

корреляционная функция случайного процесса имеет вид

$$B(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau,$$

которая изображена на Рис. 2.3б.

Представление корреляционной функции в виде (2.31) позволяет записать модель узкополосного процесса в виде

$$\xi(t) = A(t) \cos(\omega_0 t - \Phi(t)), \quad (2.32)$$

где $A(t)$ – огибающая узкополосного случайного процесса, является также случайным процессом, $\Phi(t)$ – случайная фаза узкополосного случайного процесса.

Представим случайный процесс (2.32) в виде

$$\begin{aligned} \xi(t) &= A(t) \cos \Phi(t) \cos \omega_0 t + A(t) \sin \Phi(t) \sin \omega_0 t = \\ &= A_c(t) \cos \omega_0 t + A_s(t) \sin \omega_0 t, \end{aligned} \quad (2.33)$$

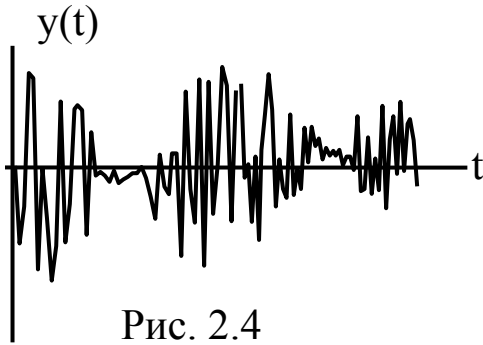


Рис. 2.4

где $A_c(t) = A(t) \cos \Phi(t)$,

$$A_s(t) = A(t) \sin \Phi(t) \quad (2.34)$$

Одна из возможных реализаций узкополосного случайного процесса представлена на рис.2.4.

Составляющие $A_c(t)$ и $A_s(t)$ являются медленно меняющимися функциями по сравнению с функциями $\cos \omega_0 t$ и $\sin \omega_0 t$.

Рассмотрим плотность распределение вероятностей огибающей $A(t)$ и фазы $\Phi(t)$ узкополосного процесса. Положим косинусная $A_c(t)$ и синусная $A_s(t)$ составляющие являются стационарными случайными процессами хотя бы в широком смысле, взаимно независимы и распределены по нормальному закону с соответствующими математическими ожиданиями (m_c, m_s) и дисперсиями $\sigma_c^2 = \sigma_s^2 = \sigma^2$:

$$w_{A_c, A_s}(x_c, x_s) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x_c - m_c)^2}{2\sigma^2} - \frac{(x_s - m_s)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2.35)$$

где $x_c(t) = x(t) \cos \varphi(t) = f_1$, $x_s(t) = x(t) \sin \varphi(t) = f_2$.

Ввиду того, что процессы $A_c(t)$ и $A_s(t)$ – стационарные и рассматриваются одномерные плотности распределения вероятности, в дальнейшем обозначим $x(t) = x$, $\varphi(t) = \varphi$.

Согласно правилам преобразования координат выразим совместную плотность огибающей и фазы как

$$w_{A, \Phi}(x, \varphi) = w_{A_c, A_s}(f_1, f_2) |J|,$$

где якобиан преобразования равен $J = x$. После соответствующих подстановок получим

$$w_{A,\Phi}(x, \varphi) = \frac{x}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left((x_c \cos \varphi - m_c)^2 + (x_s \sin \varphi - m_s)^2\right)\right)$$

Произведем упрощение показателя экспоненты при помощи подстановок

$$m_c = m \cos \beta, \quad m_s = m \sin \beta,$$

$$m_c^2 + m_s^2 = m^2, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{m_s}{m_c}.$$

В результате получим совместную плотность вероятностей

$$w_{A,\Phi}(x, \varphi) = \frac{x}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(x^2 - 2xm \cos(\varphi - \beta) + m^2\right)\right). \quad (2.36)$$

Проинтегрировав по φ , получим одномерную плотность распределения вероятностей огибающей узкополосного процесса

$$\begin{aligned} w_A(x) &= \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2+m^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{xm \cos(\varphi-\beta)}{\sigma^2}} d\varphi = \\ &= \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2+m^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{xm}{\sigma^2}\right), \quad x \geq 0, \end{aligned} \quad (2.37)$$

где $I_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{z \cos(\varphi-\beta)} d\varphi$ – модифицированная функция Бесселя

первого рода нулевого порядка от мнимого аргумента [8].

Плотность распределения вероятностей вида (2.37) называется плотностью распределения Райса.

Используя совместную плотность распределения вероятностей огибающей и фазы $w_{A,\Phi}(x, \varphi)$, проинтегрировав её по x в интервале $(0, \infty)$, где величина $\cos(\theta - \varphi) < 0$ (для того, чтобы интеграл сходился), получим плотность распределения вероятностей фазы

$$w_{\Phi}(\varphi) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}} \times \\ \times \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} - \frac{m \cos(\beta - \varphi)}{\sigma} e^{\frac{m^2 \cos^2(\theta - \varphi)}{2\sigma^2}} \left(1 - \operatorname{Erf} \left(\frac{m \cos(\beta - \varphi)}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right) \right), \quad (2.38)$$

$$\text{где } \operatorname{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

Если составляющие $A_c(t)$ и $A_s(t)$ имеют математические ожидания, равные нулю, ($m_c = m_s = 0$), то плотность распределения вероятностей огибающей будет равна

$$w_A(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.39)$$

которая называется распределением Релея.

Фаза в этом случае распределена равномерно в интервале $(-\pi, \pi)$.

Математическое ожидание и дисперсия распределения Релея равны соответственно

$$E[A] = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad D[A] = \sigma^2 \left(2 - \frac{\pi}{2} \right).$$

2.7. Марковские процессы

Наиболее общей характеристикой случайного процесса является многомерная функция распределения

$$\begin{aligned}
 & P(\xi(t_1) \leq x_1, \xi(t_2) \leq x_2, \dots, \xi(t_k) \leq x_k) = \\
 & = P(\xi(t_1) \leq x_1) P(\xi(t_2) \leq x_2 \mid \xi(t_1) \leq x_1), \dots \\
 & \dots, P(\xi(t_k) \leq x_k \mid \xi(t_{k-1}) \leq x_{k-1}, \dots, \xi(t_1) \leq x_1) = \\
 & = W_\xi(x_1, t_1) W_\xi(x_2, t_2 \mid x_1, t_1), \dots, \\
 & \dots, W_\xi(x_i, t_i \mid x_{i-1}, t_{i-1}, \dots, x_1, t_1), \dots, W_\xi(x_k, t_k \mid x_{k-1}, t_{k-1}, \dots, x_1, t_1).
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Как видно, функция распределения в произвольный момент времени t_i зависит от значений случайного процесса во все предыдущие моменты времени. Однако на практике существуют процессы, у которых значения процесса в какой-то момент времени t_i зависят только от предшествующего момента t_{i-1} . Такие процессы изучались Марковым А.А. и в его честь были названы марковскими. Многомерная функция распределения вероятностей марковского процесса имеет вид

$$w_\xi(x_1, x_2, \dots, x_k, t_1, t_2, \dots, t_k) = w_\xi(x_1, t_1) \prod_{i=2}^k w_\xi(x_i, t_i \mid x_{i-1}, t_{i-1}) \tag{2.41}$$

Из формулы (2.41) видно для описания марковского процесса достаточно знать одномерную и условные функции распределения вероятностей.

В зависимости от состояния пространства значений и времени марковские процессы подразделяются на четыре вида [1], [9] по ком-

бинациям пространства значений (непрерывное, дискретное) случайного процесса ~~случайного процесса~~ ~~случайного процесса~~ (непрерывное, дискретное).

– непрерывный марковский процесс – пространство значений – непрерывно, время – непрерывно. Описывается при помощи функции (2.41) и плотности распределения вероятностей (2.42)

$$w_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_k, t_1, t_2, \dots, t_k) = w_{\xi}(x_1, t_1) \prod_{i=2}^k w_{\xi}(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}); \quad (2.42)$$

– марковская последовательность – пространство значений – непрерывно, время – дискретно. Описывается при помощи функции и плотности распределения вероятностей (2.42), но моменты времени t_1, t_2, \dots, t_k принадлежат дискретному множеству;

– дискретный марковский процесс – пространство значений – дискретно, время – непрерывно. Описывается при помощи функции распределения вероятностей и условными вероятностями перехода из одного состояния в другое

$$\begin{aligned} P(\xi(t_1) = x_1, \xi(t_2) = x_2, \dots, \xi(t_m) = x_m) = \\ = P(\xi(t_1) = x_1) \prod_{i=1}^m P(\xi(t_i) = x_i | P(\xi(t_{i-1}) = x_{i-1})), \end{aligned} \quad (2.43)$$

где x_1, x_2, \dots, x_m – произвольные дискретные значения, принимаемые случайным процессом из некоторого дискретного множества X в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_m ;

– цепь Маркова – пространство значений – дискретно, время – дискретно. Описывается при помощи функции распределения вероятностей и условными вероятностями перехода из одного состояния в другое в дискретные моменты времени

$$\begin{aligned}
& P(\xi(t_1) = x_1, \xi(t_2) = x_2, \dots, \xi(t_k) = x_k) = \\
& = P(\xi(t_1) = x_1) \prod_{i=2}^k P(\xi(t_i) = x_i | P(\xi(t_{i-1}) = x_{i-1}))
\end{aligned} \tag{2.44}$$

где $\{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_k\}$ – произвольные дискретные значения, принимаемые случайным процессом из некоторого дискретного множества в дискретные моменты времени $\{t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots, t_k\}$.

Одним из примеров марковских процессов является блуждание точки, отображающий некоторый физический процесс, между границами, которые могут быть как поглощающими, так и отражающими.

2.7.1. Непрерывный марковский процесс

Запишем формулу (2.42) в виде

$$\begin{aligned}
& w_\xi(x_1, x_2, \dots, x_k, t_1, t_2, \dots, t_k) = \\
& = w_\xi(x_1, t_1) w_\xi(x_2, t_2 | x_1, t_1) w_\xi(x_3, t_3 | x_2, t_2) \dots w_\xi(x_k, t_k | x_{k-1}, t_{k-1})
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Условные плотности вероятностей $w_\xi(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1})$ называют плотностью вероятностей перехода из состояния x_{i-1} в состояние x_i за интервал времени (t_{i-1}, t_i) . Из (2.45) следует, что двумерная плотность распределения $w_\xi(x_{i-1}, x_i, t_{i-1}, t_i)$ в соответствующие моменты времени полностью описывают марковский процесс.

Исходя из общих свойств плотности распределения вероятностей, отметим:

$$w_\xi(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} w_\xi(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) dx_i = 1,$$

$$\lim_{t_i \rightarrow t_{i-1}} w_{\xi}(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) = \delta(x_i - x_{i-1}).$$

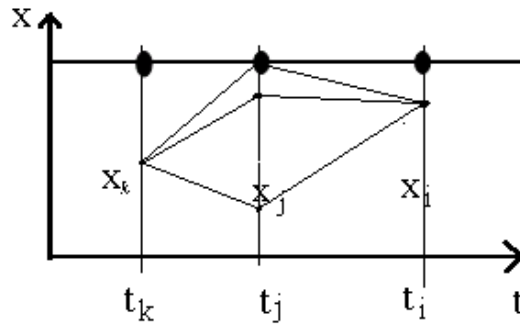


Рис 2.5

Рассмотрим три момента времени $t_k < t_j < t_i$, (рис.2.5), и соответствующие им состояния x_k, x_j, x_i . Условная плотность распределения вероятностей перехода процесса из состояния x_k в состояние x_i определяется *обобщенным уравнением Маркова*

$$w_{\xi}(x_i, t_i | x_k, t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{\xi}(x_i, t_i | x_j, t_j) w_{\xi}(x_j, t_j | x_k, t_k) dx_j. \quad (2.46)$$

В литературе можно встретить название уравнение (2.46) – уравнение Смолуховского, уравнение Колмогорова-Чепмена.

Если условная плотность вероятностей $w_{\xi}(x_i, t_i | x_k, t_k)$ зависит от разности моментов времени $t_i - t_k = \tau$, то есть,

$$w_{\xi}(x_i, t_i | x_k, t_k) = w_{\xi}(x_i, \tau | x_k),$$

то такой процесс называется *однородным во времени* (стационарным) марковским процессом.

Колмогоровым А.Н. было получено дифференциальное уравнение, позволяющее найти условную плотность распределения вероятностей при определённых допущениях.

2.7.2. Уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка

Предположим, что в точку x_i, t_i можно попасть из соседних точек с вероятностями p и q (Рис 2.6), тогда по формуле полной вероятности

$$P(x, t | x_0, t_0) = P(x - \Delta x, t - \Delta t | x_0, t_0)p + P(x + \Delta x, t - \Delta t | x_0, t_0)q$$

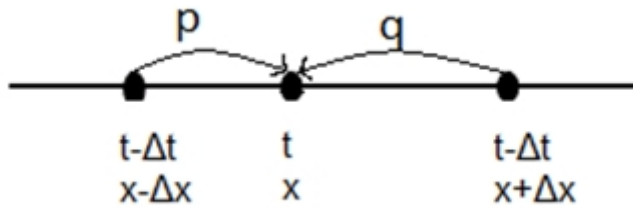


Рис 2.6

Запишем данное выражение через функцию плотности $w(x, t)$.

В виду того, что для некоторого процесса ξ

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x < \xi < x + \Delta x) = w(x) \cdot \delta(x - 0),$$

то переходную функцию распределения вероятностей P в данной точке x, t можно приближенно считать равной

$$P(x, t | x_0, t_0) \approx w(x, t | x_0, t_0) \Delta x$$

для малого Δx , тогда

$$w(x, t | x_0, t_0) \Delta x = p w(x - \Delta x, t - \Delta t | x_0, t_0) \Delta x + \\ + q w(x + \Delta x, t - \Delta t | x_0, t_0) \Delta x$$

Разложим правую часть в ряд Тейлора в точке $x = 0$

$$w(x, t | x_0, t_0) \Delta x = p \left[w(x, t | x_0, t_0) + \frac{\partial w}{\partial x} (-\Delta x) + \right. \\ \left. + \frac{\partial w}{\partial t} (-\Delta t) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} (-\Delta x)(-\Delta t) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Delta t^2 \right) \right] +$$

$$\begin{aligned}
& +q[w(x, t | x_0, t_0) + \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w}{\partial t} (-\Delta t) + \\
& + \frac{1}{2} (\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \Delta x (-\Delta t) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Delta t^2)] \\
\frac{\partial w(x, t | x_0, t_0)}{\partial t} = & - \frac{(p - q) \Delta x}{\Delta t} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (p - q) \Delta x \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \Delta t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

$\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta x \rightarrow 0$, (при Δt , стремящемся к нулю, интервал Δx также стремится к нулю)

Пусть $\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \frac{(p - q) \Delta x}{\Delta t} = A$, $\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2}{\Delta t} = B$

Таким образом получим дифференциальное уравнение параболического типа:

$$\frac{\partial w(x, t | x_0, t_0)}{\partial t} = -A \frac{\partial w(x, t | x_0, t_0)}{\partial x} + \frac{1}{2} B \frac{\partial^2 w(x, t | x_0, t_0)}{\partial x^2}, \quad (2.56)$$

Решением уравнения (2.56) будет

$$w(x, t | x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi B \cdot (t - t_0)}} \exp\left(-\frac{1}{2B \cdot (t - t_0)} (x - x_0 - A \cdot (t - t_0))^2\right) \quad (2.57)$$

Как видно из (2.57) значения координаты x диффузионного процесса $\xi(t)$ подчинены нормальному закону с дисперсией $D[\xi(t)] = B \cdot (t - t_0)$ и математическим ожиданием $E[\xi(t)] = x + A \cdot (t - t_0)$.

Величины A и B называются коэффициентами *сноса* и *диффузии*, соответственно. Они показывают изменение положения среднего значения величины x и величину разброса значения x около среднего значения со временем относительно начала отсчета x_0, t_0 .

Полученные результаты справедливы тогда, когда величины A и B не зависят от координаты и времени. В том случае, если величины A и B зависят от координаты x и времени t , то первое уравнение Колмогорова примет вид

$$\frac{\partial w_{\xi}(x, t | x_0, t_0)}{\partial t} = -a(x, t) \frac{\partial [w_{\xi}(x, t | x_0, t_0)]}{\partial x} + \frac{1}{2} b(x, t) \frac{\partial^2 [w_{\xi}(x, t | x_0, t_0)]}{\partial x^2}, \quad (2.54)$$

где

$$a(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|z-x| < \delta} (z - x) w(z, t | x, t - \Delta t) dz,$$

$$b(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|z-x| < \delta} (z - x)^2 w(z, t | x, t - \Delta t) dz.$$

Первое уравнение Колмогорова называют *уравнением обращенным в прошлое*. Переменными будут x_0 и $t_0 \leq t$, переменные x и t вводятся через начальное условие $w(x, t | x_0, t) = \delta(x - x_0)$.

Запишем без доказательства *второе уравнение Колмогорова*

$$\frac{\partial w_{\xi}(x, t | x_0, t_0)}{\partial t} = - \frac{\partial [A(x, t) w_{\xi}(x, t | x_0, t_0)]}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [B(x, t_0) w_{\xi}(x, t | x_0, t_0)]}{\partial x^2}, \quad (2.55)$$

где

$$A(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int (z - x) w(z, t | x, t - \Delta t) dz, \quad (2.56)$$

$$B(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int (z - x)^2 w(z, t | x, t - \Delta t) dz. \quad (2.57)$$

Второе уравнение Колмогорова называют *уравнением, обращенным в будущее*. В этом случае переменными будут x и $t \geq t_0$, а пере-

менные x и t вводятся через начальное условие $w(x, t_0 | x_0, t_0) = \delta(x - x_0)$ [1].

Второе уравнение Колмогорова называют также *уравнением Фоккера-Планка*.

Предполагается, что коэффициенты $A(x, t)$, $B(x, t)$ известны из физической постановки задачи и требуется найти условные плотности распределения. Оба уравнения Колмогорова принадлежат к параболическому типу дифференциальных уравнений.

Коэффициент $A(x, t)$ характеризует среднюю скорость изменения процесса $\xi(t)$, а коэффициент $B(x, t)$ пропорционален скорости изменения дисперсии процесса $\xi(t)$.

2.7.3. Винеровский процесс

Винеровским процессом $\eta(t)$ называется случайный процесс на выходе идеального интегратора (рис. 2.7), когда на его вход подается нормальный белый шум $\xi(t)$ с параметрами

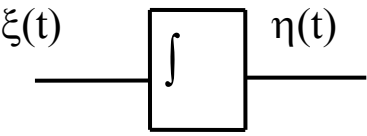


Рис. 2.7

$$E[\xi(t)] = 0, \quad B_\xi(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau),$$

$$\eta(t) = \int_0^t \xi(\tau) d\tau. \quad (2.58)$$

Ввиду того, что операция интегрирования является линейной операцией, значения процесса $\eta(t)$ будут распределены по нормаль-

ному закону с математическим ожиданием $E[\eta(t)] = 0$ и ковариационной функцией

$$B_{\eta}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} E[\xi(\tau_1) \xi(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 = \frac{N_0}{2} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \delta(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2.$$

В зависимости от того $t_1 > t_2$ или $t_1 < t_2$ будут разные значения ковариационной функции. Объединяя оба возможных значения, запишем

$$B_{\eta}(t_1, t_2) = \frac{N_0}{2} \min(t_1, t_2). \quad (2.59)$$

Как видно из (2.59), значение ковариационной функции зависит от значений моментов отсчета.

Определим дисперсию случайного процесса $\eta(t)$ в момент времени t_i как

$$\sigma_{\eta}^2(t_i) = D[\eta(t_i)] = \lim_{t_j \rightarrow t_i} B_{\eta}(t_i, t_j) = \frac{N_0}{2} t_i, \quad (i, j = 1, 2, i \neq j),$$

т.е. дисперсия процесса $\eta(t)$ зависит от момента отсчета.

Таким образом, одномерная плотность распределения будет рав-

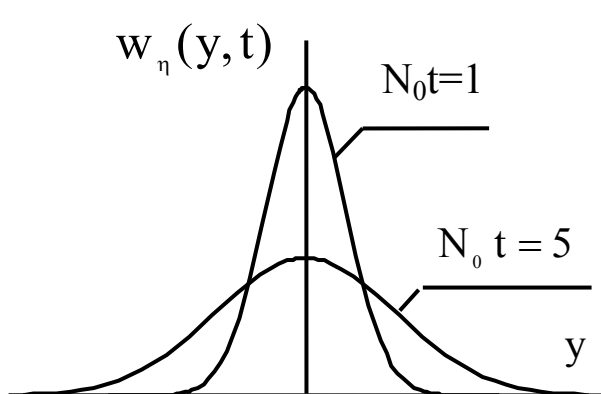


Рис. 2.8

на

$$w_{\eta}(y, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 t}} \exp\left(-\frac{y^2}{N_0 t}\right)$$

Для сравнения построим плотность распределения

$w_{\eta}(y, t)$ для $N_0 t = 1$ и для $N_0 t = 5$, считая, что спектральная плот-

ность мощности $N_0/2$ остается постоянной, а меняется время, рис. 2.8. Как видно из рисунка, с увеличением времени наблюдения t плотность вероятностей становится пологой, т.е. увеличивается разброс значений процесса около математического ожидания.

Запишем двумерную плотность распределения процесса $\eta(t)$. Для этого вычислим нормированную ковариационную матрицу \mathbf{R}_η . Так как $E[\eta(t)] = 0$, то элементы ковариационной матрицы имеют вид

$$R_\eta(t_i, t_j) = \frac{B_\eta(t_i, t_j)}{\sigma_\eta(t_i)\sigma_\eta(t_j)} = \begin{cases} \sqrt{t_i/t_j}, & \text{if } t_i < t_j \\ \sqrt{t_j/t_i}, & \text{if } t_i \geq t_j \end{cases}, \quad (2.60)$$

где $\sigma_\eta^2(t_i)$, $(i = 1, 2)$ – дисперсия случайного процесса $\eta(t)$ в момент времени t_i , $(i = 1, 2)$ относительно начала отсчета.

Формулу (2.60) можно записать в другой форме

$$R_\eta(t_i, t_j) = \sqrt{\frac{\min(t_i, t_j)}{\max(t_i, t_j)}}$$

Ковариационная матрица запишется как

$$\mathbf{R}_\eta = \begin{pmatrix} 1 & R_\eta(t_1, t_2) \\ R_\eta(t_2, t_1) & 1 \end{pmatrix}.$$

Двумерная плотность распределения равна

$$w_\xi(y_1, y_2, t_1, t_2) = \frac{1}{\pi N_0 \sqrt{t_1 t_2} \sqrt{1 - R_\eta^2(t_1, t_2)}} \times \\ \times \exp \left(-\frac{1}{2(1 - R_\eta^2(t_1, t_2))} \left(\frac{2y_1^2}{N_0 t_1} - R_\eta(t_1, t_2) \frac{y_1 y_2}{N_0 t_1 t_2} + \frac{2y_2^2}{N_0 t_2} \right) \right)$$

Винеровский процесс будет также марковским. Рассмотрим три момента времени $t_{i-2} < t_{i-1} < t_i$ и запишем трехмерную плотность вероятностей

$$\begin{aligned} w_{\eta}(y_{i-2}, y_{i-1}, y_i, t_{i-2}, t_{i-1}, t_i) = \\ = w_{\eta}(y_{i-2}, t_{i-2}) w_{\eta}(y_{i-1}, t_{i-1} | y_{i-2}, t_{i-2}) w_{\eta}(y_i, t_i | y_{i-1}, y_{i-2}, t_{i-1}, t_{i-2}) \end{aligned}$$

Используя равенство (2.58), запишем

$$\eta(t_i) = \int_0^{t_i} \xi(\tau) d\tau = \int_0^{t_{i-1}} \xi(\tau) d\tau + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \xi(\tau) d\tau = \eta(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \xi(\tau) d\tau.$$

Из последней формулы видно, значения процесса в момент t_i не зависит от момента времени t_{i-2} и поэтому можно записать

$$\begin{aligned} w_{\eta}(y_{i-2}, y_{i-1}, y_i, t_{i-2}, t_{i-1}, t_i) = \\ = w_{\eta}(y_{i-2}, t_{i-2}) w_{\eta}(y_{i-1}, t_{i-1} | y_{i-2}, t_{i-2}) w_{\eta}(y_i, t_i | y_{i-1}, t_{i-1}). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Формулу (2.61) можно обобщить и получить формулу (2.41).

2.7.4. Марковские цепи

Положим, случайный процесс $\xi(t)$ в дискретные моменты времени $t_0, t_1, t_2, t_3, \dots$ может принимать дискретные значения x_j из некоторого конечного множества X с числом элементов, равным K . Припишем номер каждому состоянию $x_j = j$. Состояние x_j в момент t_0 будем считать начальным состоянием процесса, описываемое распределением вероятностей $P(\xi(t_0) = j)$, $j = 1, 2, \dots, N$. Условные вероятности (*вероятности перехода*)

$$P(\xi(t_{m+n}) = k | \xi(t_m) = j) = \pi_{jk}(n) \quad (2.62)$$

показывают вероятность перехода из состояния $x_j = j$ в момент времени t_m в состояние $x_k = k$ за n шагов ($n = 1, 2, \dots, j, k = 1, 2, \dots, N$). Если вероятности перехода (2.62) не зависят от момента времени t_m , а зависят только от n , то такая марковская цепь называется *однородной*. Вероятности перехода однородной цепи Маркова образуют матрицу $\pi(n)$:

$$\pi(n) = \begin{pmatrix} \pi_{11}(n) & \pi_{12}(n) & \cdots & \pi_{1N}(n) \\ \pi_{21}(n) & \pi_{22}(n) & \cdots & \pi_{2N}(n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \pi_{N1}(n) & \pi_{N2}(n) & \cdots & \pi_{NN}(n) \end{pmatrix}.$$

Вероятности перехода удовлетворяют условию нормировки

$$\sum_{k=1}^N \pi_{jk}(n) = 1.$$

Для условных вероятностей (2.62) справедливо уравнение *Маркова*

$$\pi_{jk}(n+m) = \sum_{i=1}^N \pi_{ji}(n) \pi_{ik}(m), \quad n \geq 0, m \geq 0, \quad (2.63)$$

или в матричной форме

$$\pi(n+m) = \pi(n) \pi(m), \quad (2.64)$$

которое называется также уравнением Колмогорова-Чепмена.

Уравнение Маркова позволяет вычислить условные вероятности перехода $\pi_{jk}(n+m)$ в состояния (j, k) $0 \leq j, k \leq N$ за $n+m$ испытаний.

Вероятность того, что случайный процесс будет находиться в состоянии k через $m + n$ испытаний равна

$$\pi_k(m+n) = \sum_{i=1}^N \pi_i(m) \pi_{ik}(n), \quad n \geq 0, m \geq 0, \quad (2.65)$$

которое также называется *уравнением Маркова* [11].

В частности, если $m = 0$, получим

$$\begin{aligned} P(\xi(t_n) = k) &= \pi_k(n) = \\ &= \sum_{i=1}^N \pi_i(0) \pi_{ik}(n), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (2.66)$$

т.е. зная распределение вероятностей $\pi_i(0) = P(\xi(t_0) = i)$, $i = 1, 2, \dots, N$ состояния случайного процесса в момент времени t_0 и вероятности перехода $\pi_{ij}(n)$, можно найти распределение вероятностей состояния случайного процесса в момент времени t_n .

Рассмотрим более подробно (2.64). Положим $m = 1, n = 1, 2, \dots$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \pi(2) &= \pi(1) \pi(1) = \pi^2(1); \\ \pi(3) &= \pi(2) \pi(1) = \pi^3(1); \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Продолжая эту процедуру, определим для произвольного n матрицу вероятностей переходов за n испытаний как степень матрицы вероятностей переходов за одно испытание

$$\pi(n) = \pi^n(1). \quad (2.67)$$

Перепишем формулу (2.66), используя (2.67) в матричной форме

$$\pi(n) = \pi^T(0) \pi^n(1),$$

где $\pi^T(0)$ – транспонированный вектор распределения вероятностей состояния случайного процесса в момент времени t_0 .

Если за конечное число n шагов процесс из состояния x_i может попасть в состояние x_k с вероятностью $\pi_{jk}(n) > 0$, то состояние x_k *достижимо* из состояния x_i .

Два состояния x_i и x_k называются *сообщающимися*, если они достижимы друг из друга. Если два состояния не сообщаются, то либо $\pi_{jk}(n) = 0$, либо $\pi_{kk}(n) = 0$, либо оба условия выполняются одновременно[3].

Исходя из этих определений, все состояния можно разбить на классы эквивалентности по принадлежности к сообщаемся состояниям. Например, пусть процесс может находиться в пяти состояниях, и матрица переходных вероятностей имеет вид

$$\pi = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \pi_2 \end{pmatrix}.$$

Матрица π распадается на два класса состояний: $\{1, 2\}$ и $\{3, 4, 5\}$. Внутри класса состояния сообщаются, но классы между собой не сообщаются. В зависимости от реализации начального состояния пе-

переходные вероятности случайного процесса описываются либо подматрицей π_1 , либо подматрицей π_2 .

Цепь Маркова называется *возвратной*, если случайный процесс, выходящий из некоторого состояния x_i , с вероятностью 1 возвращается в это же состояние x_i когда-нибудь. В противном случае цепь называется *невозвратной* [4].

Множество возвратных сообщающихся состояний называется *эргодическим*. Если цепь состоит из единственного эргодического множества, она называется *эргодической*. При увеличении числа шагов n большего, чем n_0 , может случиться, что переходные вероятности *не будут зависеть от начального состояния*, т.е.

$$\pi_{ik}(n \geq n_0) = \pi_k = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_N \end{pmatrix}, \quad \sum_{k=1}^N \pi_k = 1.$$

Цепь, удовлетворяющая этим условиям, называется *регулярной эргодической цепью* или *стационарной цепью*.

Распределение π_k , $k = 1, 2, \dots, N$ находится как решение системы линейных уравнений [3]

$$\pi_k = \sum_{i=1}^N \pi_i \pi_{ik}, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

для некоторого $n \geq n_0$.

Полученное распределение вероятностей π_k , $k = 1, 2, \dots, K$ говорит о том, что распределение не зависит от начальных условий и исследуемая система переходит в стационарный режим.

Если в матрице переходных вероятностей через n шагов содержится элемент, удовлетворяющий условию $\pi_{ik}(n) = \delta_{ik}$, где δ_{ik} – символ Кронекера, то состояние x_i называется *поглощающим*.

Марковские процессы используются при решении практических задач, таких как, обнаружение сигналов, исследовании модели процесса рождения и гибели, в теории очередей, теории массового обслуживания.

2.7.5. Примеры марковских процессов

1. Процесс броуновского движения

Броуновское движение - это беспорядочное движение малых частиц, взвешенных в жидкости или газе, происходящее под действием ударов молекул окружающей среды [12]. Оно исследовано в 1827 г. Р. Броуном, который наблюдал в микроскоп движение цветочной пыльцы, помещенной в воду. Наблюдаемые частицы (броуновские) размером ~ 1 мкм и менее совершают неупорядоченные независимые движения, описывая сложные зигзагообразные траектории. Интенсивность броуновского движения не зависит от времени, но возрастает с ростом температуры среды, уменьшением её вязкости и размеров частиц (независимо от их химической природы). Полная теория броуновского движения была дана А. Эйнштейном и М. Смолуховским в 1905–1906 годах [14].

Причины броуновского движения – тепловое движение молекул среды и отсутствие точной компенсации ударов, испытываемых частицей со стороны окружающих её молекул, т. е. броуновское движение обусловлено флуктуациями давления. Удары молекул среды приводят частицу в беспорядочное движение: скорость её быстро меняется по величине и направлению. Если фиксировать положение частиц через небольшие равные промежутки времени, то построенная таким методом траектория оказывается чрезвычайно сложной и запутанной.

К процессу броуновского движения можно прийти путем предельного перехода от случайного блуждания, особенностью которого является малое перемещение за один шаг[15]. Предположим, что частица совершает случайное блуждание с шагом по времени Δt и шагом по координате Δx . В пределе такое движение будет казаться непрерывным (за малое время Δt частица перемещается на малое расстояние Δx). Рассмотрим неограниченное случайное блуждание. Положим, что за каждый шаг частица может изменить своё состояние только на $\pm \Delta x$, при чем переход вверх ($+\Delta x$) осуществляется с вероятностью p , а переход вниз ($-\Delta x$) – с вероятностью $q=1-p$. Дополнительно предположим, что размеры частиц не велики. При таких предположениях можно считать броуновское движение марковским процессом (ведь вероятность перехода в следующее состояние зависит только от текущего момента, а не от «прошлого»). Данные рассуждения приводят нас к выводу первого уравнения Колмогорова, предложенного в пункте 1.7.2. Броуновский процесс является диффузным. Обозначим через функции $a(x, t)$ и $\sigma^2(x, t)$ – ко-

эффиценты сноса и диффузии, соответствующие физическим характеристикам процесса броуновского движения, тогда мы приходим к следующему уравнению, которое называется обратным уравнением Колмогорова:

$$\frac{\partial w(x, t, x_0, t_0)}{\partial t} = -a(x, t) \frac{\partial w(x, t, x_0, t_0)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 w(x, t, x_0, t_0)}{\partial x^2},$$

где $w(x, t, x_0, t_0)$ – переходная плотность, непрерывная по x и t вместе с производными первого и второго порядков.

2. Поток без последствий

Под потоком событий понимается последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени (например, поток вызовов на телефонной станции, поток отказов ЭВМ, поток покупателей и т.п.).

Случайный процесс, протекающий в системе S , называется марковским (или «потоком без последствий»), если он обладает следующим свойством: для каждого момента времени t_0 вероятность любого состояния системы в будущем (при $t > t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $t = t_0$) и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние (т. е. как развивался процесс в прошлом).

Простейший поток в качестве предельного возникает в теории случайных процессов столь же естественно, как в теории вероятностей нормальное распределение получается в качестве предельного для суммы случайных величин: при наложении (суперпозиции) достаточно большого числа n независимых, стационарных и ординарных

потоков (сравнимых между собой по интенсивностям $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$) получается поток, близкий к простейшему с интенсивностью λ , равной сумме интенсивностей входящих потоков, т.е.

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Рассмотрим на оси времени Ot (рис. 2.9) простейший поток событий как неограниченную последовательность случайных точек [16,17].

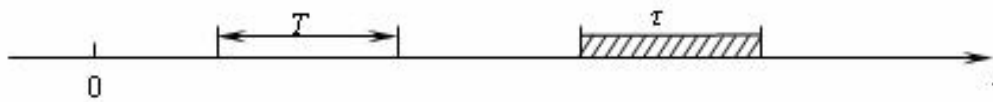


Рис. 2.9

Можно показать, что для простейшего потока число m событий (точек), попадающих на произвольный участок времени t , распределено по закону Пуассона

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} \times e^{-\lambda\tau},$$

для которого математическое ожидание случайной величины равно ее дисперсии: $a = s^2 = \lambda\tau$. В частности, вероятность того, что за время t не произойдет ни одного события ($m=0$), равна

$$P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau}$$

Найдем распределение интервала времени T между произвольными двумя соседними событиями простейшего потока.

Вероятность того, что на участке времени длиной t не появится ни одного из последующих событий, равна

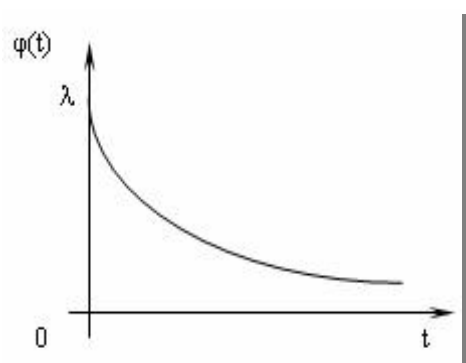
$$P(T > t) = e^{-\lambda t},$$

а вероятность противоположного события, т.е. функция распределения случайной величины T , есть

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Плотность вероятности случайной величины есть производная ее функции распределения (рис. 2.10), т.е.

$$\varphi(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$



Распределение, задаваемое такой плотностью вероятностей или функцией распределения, называется *показательным* (или *экспоненциальным*).

Рис. 2.10

Таким образом, интервал времени между двумя соседними произвольными событиями имеет показательное распределение, для которого математическое ожидание равно среднему квадратическому отклонению случайной величины

$$a = \sigma = \frac{1}{\lambda}$$

и обратно по величине интенсивности потока λ .

Важнейшее свойство показательного распределения (присущее только показательному распределению) состоит в следующем: если промежуток времени, распределенный по показательному закону, уже длился некоторое время t , то это никак не влияет на закон распределения оставшейся части промежутка $(T-t)$: он будет таким же, как и закон распределения всего промежутка T .

Другими словами, для интервала времени T между двумя последовательными соседними событиями потока, имеющего показательное распределение, любые сведения о том, сколько времени протекал этот интервал, не влияют на закон распределения оставшейся части. Это свойство показательного закона представляет собой, в сущности, другую формулировку для «отсутствия последействия» – основного свойства простейшего потока.

Для простейшего потока с интенсивностью λ вероятность попадания на *элементарный (малый)* отрезок времени Δt хотя бы одного события потока равна

$$P_{\Delta t} = P(T < \Delta t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t} \approx \lambda \Delta t.$$

Формула является приближенной, т.к. получена заменой функции $e^{-\lambda \Delta t}$ лишь двумя первыми членами ее разложения в ряд по степеням Δt .

2.7.6. Процесс Пуассона. Дробовой эффект

Под дробовым эффектом понимают «небольшое беспорядочное отклонение тока электровакуумных приборов и полупроводниковых

приборов от среднего значения, вызванное неравномерностью электронной эмиссии или инжекцией носителей заряда в полупроводниковых приборах» [12]. Предполагается, что демпферный (депрессия) эффект отсутствует. Рассмотрим дробовой эффект в электронных лампах [6]. Положим, T – время наблюдения, разделим интервал наблюдения на N интервалов длиной $\tau = T/N$. Число N выберем таким большим, что вероятность вылета более одного электрона с катода была бы такой малой величиной, которой можно пренебречь. Тогда за время τ с катода вылетает один электрон с вероятностью p и не вылетает с вероятностью $q = 1 - p$. Положим, за время T с катода вылетело n электронов. Тогда величина тока в единицу времени равна $I_T = \frac{ne}{T}$, где e – заряд электрона. ($e \approx 1.6 \cdot 10^{-19}$ К). Среднее значение тока равно

$$I_{\text{ср}} = E[I_T] = \frac{E[n]e}{T} = \frac{pNe}{T} = n_1 e \quad (2.68)$$

Величина $n_1 = \frac{pN}{T}$ – среднее число электронов, вылетающих с

катода в единицу времени. Из этого соотношения получим

$$p = \frac{n_1 N}{T} = n_1 \tau. \text{ Как видим, с уменьшением } \tau \text{ уменьшается и ве-}$$

роятность вылета электрона.

Интенсивность флуктуаций тока (дисперсия тока) равна

$$D[I_T] = \frac{D[n]e^2}{T^2} = \frac{pqNe^2}{T^2} = \frac{e^2 n_1}{T} \left(1 - \frac{n_1 T}{N}\right)$$

С увеличением числа разбиений N ($N \rightarrow \infty$) дисперсия стремится к величине

$$D[I_T] = \frac{e^2 n_1}{T} = \frac{e I_{cp}}{T} \quad (2.69)$$

Введем относительное квадратичное отклонение

$$\frac{D[I_T]}{(E[I_T])^2} = \frac{e}{T I_{cp}} \quad (2.70)$$

Из выражений (2.69) и (2.70) видно, что с увеличением времени наблюдения T дисперсия (флуктуации) и относительное квадратичное отклонение уменьшаются. За время T среднее число электронов, вылетевших с катода, равно $\bar{n} = n_1 T$ и будем считать это число электронов постоянным, не зависящим от N , т.е. с ростом N величина \bar{n} не меняется. Тогда вероятность вылета одного электрона в каждом временном интервале τ будет равна $p_1 = \frac{\bar{n}}{N}$. Определим вероятность

$P_N(n)$ вылета n электронов во всех N интервалах:

$$\begin{aligned} P_N(n) &= C_N^n p_1^n (1 - p_1)^{N-n} = \\ &= \frac{N(N-1)\dots(N-(n-1))}{n!} \left(\frac{\bar{n}}{N}\right)^n \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n} = \\ &= \frac{\bar{n}^n}{n!} \frac{N(N-1)\dots(N-(n-1))}{N^n} \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n} = \\ &= \frac{\bar{n}^n}{n!} 1 \left(1 - \frac{1}{N}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^N \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^{-n}. \end{aligned}$$

Определим вероятность $P_N(n)$ при $N \rightarrow \infty$. Тогда, используя замену $k = -N/\bar{n}$, имеем

$$P(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^N = \frac{\bar{n}^n}{n!} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k} = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}.$$

Таким образом, если известно среднее количество электронов \bar{n} , вылетевших с катода за время T , то вероятность вылета n электронов за время T подчинено закону *Пуассона*

$$P(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} \quad (2.71)$$

Из вывода формулы (2.71) видно, что закон Пуассона применим к процессам, для которых вероятность появления интересующего события близка к нулю или единице и известно среднее количество событий \bar{n} за время наблюдения T . Характерной особенностью закона Пуассона является равенство математического ожидания числа событий и дисперсии числа событий. Действительно,

$$E[n] = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} = \bar{n} e^{-\bar{n}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{n}^{n-1}}{(n-1)!} = \bar{n} e^{-\bar{n}} e^{\bar{n}} = \bar{n},$$

$$E[n^2] = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} = \bar{n}(1 + \bar{n}),$$

$$D[n] = E[n^2] - (E[n])^2 = \bar{n}.$$

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ИНЕРЦИОННЫХ ЦЕПЯХ

Радиотехнические цепи можно разделить на линейные и нелинейные цепи, которые в свою очередь подразделяются на инерцион-

ные и неинерционные. Работа цепи может быть описана некоторым оператором. Оператор L , преобразующий входной процесс $x(t)$ в выходной процесс $y(t)$, называется линейным, если выполняется следующее условие

$$L(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) = \alpha L(x_1(t)) + \beta L(x_2(t))$$

где α и β – константы.

Примерами линейных операторов являются дифференцирование, интегрирование, суммирование и т.д.

Если значение сигнала на выходе цепи в момент времени t определяется только лишь значением входного сигнала в тот же момент времени t , такая цепь называется *неинерционной* или *системой без памяти*. Если же значение сигнала на выходе цепи в момент времени t определяется значением входного сигнала в момент времени t и реакцией цепи на сигналы, поданные в более ранние моменты времени, такая цепь называется *инерционной* или *системой с памятью*. Инерционность цепи характеризуется постоянной времени цепи.

Анализ радиотехнических цепей с точки зрения прохождения случайных процессов заключается в определении вероятностных характеристик на выходе цепи, если известны соответствующие характеристики на входе цепи и описание самой цепи.

Наиболее сложными для анализа являются нелинейные инерционные цепи. Для них нет общих методов анализа. В каждом частном случае нелинейного преобразования применяют тот метод, который позволяет решить задачу.

При анализе нелинейных неинерционных цепей, если не удастся найти обратное преобразование, часто применяют кусочно-линейную аппроксимацию функции, описывающей работу цепи. Затем рассчитывают характеристики выходного сигнала на отдельных интервалах аппроксимации.

Определение функции распределения вероятностей или плотности распределения вероятностей при анализе линейных инерционных цепей довольно трудная задача. Поэтому ограничимся расчетами числовых характеристик на выходе линейной инерционной цепи. При этом применяются или аппарат дифференциальных уравнений, или импульсные характеристики, или передаточные функции (метод частотных характеристик).

Аппарат дифференциальных уравнений используется, когда анализируют как динамический (нестационарный) режим работы цепи, так и установившийся (стационарный) режим, начальные условия – произвольные.

Импульсными характеристиками удобно пользоваться, когда анализируют как динамический, так и установившийся режимы, но при нулевых начальных условиях.

Передаточные функции используются при анализе установившегося (стационарного) режима работы цепи.

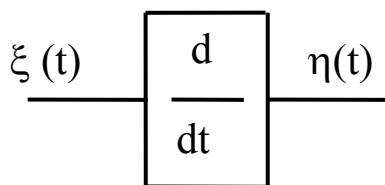


Рис. 3.1

Применение дифференциальных уравнений. Пусть исследуемая цепь описывается известным дифференциальным

уравнением с постоянными коэффициентами, а на вход цепи подается случайный сигнал $\xi(t)$, (рис.3.1). Тогда входной сигнал и выходной сигналы $\eta(t)$ связаны соотношением

$$a_0 \xi(t) + \sum_{j=1}^k a_j \frac{d^j \xi(t)}{dt^j} = b_0 \eta(t) + \sum_{i=1}^m b_i \frac{d^i \eta(t)}{dt^i} \quad (3.2)$$

с начальными условиями

$$\eta(t_0) = C_0, \frac{d\eta(t_0)}{dt} = C_1, \dots, \frac{d^{m-1} \eta(t_0)}{dt^{m-1}} = C_{m-1}.$$

Предполагается, что условия дифференцируемости и интегрируемости случайных процессов выполнены. Применим оператор математического ожидания к обеим частям равенства (3.2)

$$a_0 E[\xi(t)] + \sum_{j=1}^k a_j \frac{d^j E[\xi(t)]}{dt^j} = b_0 E[\eta(t)] + \sum_{i=1}^m b_i \frac{d^i E[\eta(t)]}{dt^i}.$$

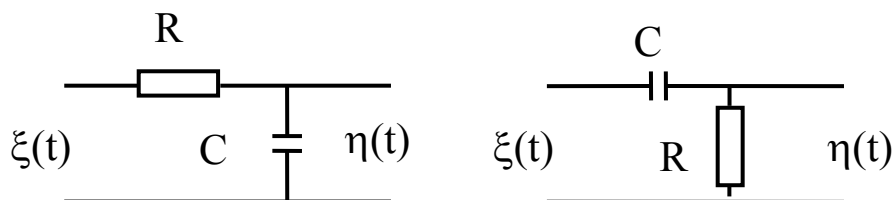


Рис. 3.2

В результате получили обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами относительно $E[\eta(t)]$.

Рассмотрим примеры: прохождение случайного процесса $\xi(t)$ через интегрирующую и дифференцирующую цепи, (рис.3.2).

Дифференциальные уравнения, описывающие интегрирующую и дифференцирующую цепи, соответственно имеют вид

$$\frac{1}{RC} \xi(t) = \frac{d\eta(t)}{dt} + \frac{1}{RC} \eta(t), \quad \eta(0) = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \frac{d\eta(t)}{dt} + \frac{1}{RC}\eta(t), \quad \eta(0) = 0.$$

Рассмотрим более подробно интегрирующую цепь. Решение уравнения (3.3) имеет вид

$$\eta(t) = \alpha e^{-\alpha t} \int_0^t \xi(x) e^{\alpha x} dx, \quad \text{где} \quad \alpha = 1/(RC). \quad (3.4)$$

Положим, $E[\xi(t)] = m_\xi$. Вычислим математическое ожидание:

$$E[\eta(t)] = \alpha e^{-\alpha t} \int_0^t E[\xi(x)] e^{\alpha x} dx = m_\xi (1 - e^{-\alpha t}) \quad (3.5)$$

Как видно из (3.5), математическое ожидание случайного процесса $\eta(t)$ зависит от времени, т.е. процесс на выходе интегрирующей цепи – нестационарный даже если процесс на входе – стационарный. Но если время наблюдения t намного больше постоянной времени цепи $\tau = RC$, то величиной $e^{-\alpha t}$ можно пренебречь и, в результате, получим

$$E[\eta(t)] = E[\xi(t)] = m_\xi. \quad (3.6)$$

Вычислим корреляционную функцию процесса $\eta(t)$:

$$\begin{aligned} B_\eta(t_1, t_2) &= E[\eta(t_1), \eta(t_2)] = \\ &= \alpha^2 e^{-\alpha(t_1+t_2)} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} E[\xi(x_1)\xi(x_2)] e^{\alpha(x_1+x_2)} dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Если процесс $\xi(t)$ – стационарный, то

$$\begin{aligned} B_\eta(t_1, t_2) &= \\ &= \alpha^2 e^{-\alpha(t_1+t_2)} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} B(x_2 - x_1) e^{\alpha(x_1+x_2)} dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

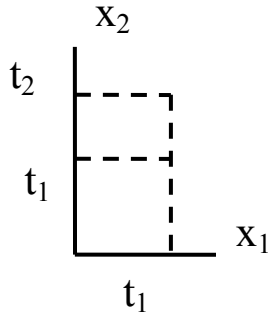


Рис. 3.3

Если процесс $\xi(t)$ – белый шум с нулевым математическим ожиданием, то

$$B_{\eta}(t_1, t_2) = \frac{N_0 \alpha^2}{2} e^{-\alpha(t_1+t_2)} \times$$

$$\times \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \delta(x_2 - x_1) e^{\alpha(x_1+x_2)} dx_1 dx_2.$$

При вычислении двойного интеграла необходимо учитывать свойства δ -функции и области интегрирования $(0, t_1), (0, t_2)$, которые могут не совпадать.

1) Положим, $t_1 < t_2$, (рис.3.3) Так как $0 \leq x_1 \leq t_1 < t_2$, проинтегрируем (3.6) по t_2 , а затем по t_1 :

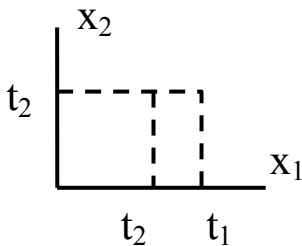
$$\begin{aligned} B_{\eta}(t_1, t_2) &= \frac{N_0 \alpha^2}{2} e^{-\alpha(t_1+t_2)} \int_0^{t_1} e^{\alpha x_1} \int_0^{t_2} \delta(x_2 - x_1) e^{\alpha x_2} dx_2 dx_1 = \\ &= \frac{N_0 \alpha^2}{2} e^{-\alpha(t_1+t_2)} \int_0^{t_1} e^{2\alpha x_1} dx_1 = \frac{N_0 \alpha^2}{4\alpha} e^{-\alpha(t_1+t_2)} (e^{2\alpha t_1} - 1). \end{aligned}$$

Введем переменную $\tau = t_2 - t_1$ и заменим $t_2 = t_1 - \tau$. Тогда

$$B_{\eta}(t_1, t_1 + \tau) = \frac{\alpha N_0}{4} e^{-\alpha \tau} (1 - e^{-2\alpha t_1}). \quad (3.7a)$$

2) Положим, $t_2 < t_1$, ($\tau < 0$) (рис.3.4). Используя предыдущую методику вычислений, получим

$$B_{\eta}(t_2 - \tau, t_2) = \frac{\alpha N_0}{4} e^{\alpha \tau} (1 - e^{-2\alpha t_2}) \quad (3.7b)$$



Используя сделанные допущения, объединим обе формулы

Рис. 3.4

$$B_{\eta}(\tau, t) = \frac{\alpha N_0}{4} e^{-\alpha|\tau|} (1 - e^{-2\alpha t}). \quad (3.7)$$

Как видно из формулы (3.7), корреляционная функция зависит от текущего момента времени. Если время наблюдения намного больше постоянной времени цепи, членом $e^{-2\alpha t}$ в (3.7) можно пренебречь и в результате получим

$$B_{\eta}(\tau) = \frac{\alpha N_0}{4} e^{-\alpha|\tau|}. \quad (3.8)$$

Рассматривая формулы (3.5) и (3.7), можно заключить, если на вход интегрирующей цепи воздействует стационарный случайный процесс при достаточно большом времени наблюдения случайный процесс на выходе интегрирующей цепи будет также стационарным. Мощность процесса $\eta(t)$ определяется как

$$B_{\eta}(0) = \frac{\alpha N_0}{4} [\text{Вт}].$$

Применение импульсной характеристики. Сигнал $\eta(t)$ на выходе линейной системы зависит не только от значений сигнала $\xi(t)$ в момент времени t , но и от реакции цепи на сигнал, поданный в предыдущие моменты времени т.е. от памяти цепи. Эта реакция учитывается функцией $h(t)$ и называется *импульсной характеристикой*. Ввиду того, что система линейна, реакция цепи на входной сигнал в момент времени t складывается с реакцией цепи, образовавшейся от значений сигналов, поступивших в более ранние моменты времени, т.е. соблюдается принцип суперпозиции. Если цепь аналоговая, сигнал на выходе цепи описывается интегралом Дюамеля

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) \xi(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \xi(t - \tau) d\tau. \quad (3.9)$$

Предел интегрирования $(-\infty)$ учитывает реакцию цепи по времени от $-\infty$ до текущего момента t , а предел интегрирования (∞) учитывает реакцию цепи по времени от текущего момента t до ∞ на значения сигналов, которые поступят после момента времени t .

Импульсная характеристика является реакцией цепи на δ -функцию, т.е. является решением дифференциального уравнения вида

$$\delta(t) = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i h(t)}{dt^i}, \quad h(0) = 0, \quad \frac{d^j h(0)}{dt^j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m-1.$$

Радиотехнические цепи (радиотехнические системы) с точки зрения реализуемости делятся на две группы – физически реализуемые и физически нереализуемые системы. Система физически реализуема, если

$$h(t - \tau) = \begin{cases} \neq 0 & \text{для } t \geq \tau \\ = 0 & \text{для } t < \tau \end{cases}, \quad (3.10)$$

т.е. отклик системы на возмущение не должен появиться ранее, чем будет приложено возмущение. Используя это условие, перепишем (3.9) в виде

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^t h(t - \tau) \xi(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau) \xi(t - \tau) d\tau.$$

Система, имеющая импульсную характеристику $h(t)$, будет устойчивой[4], если

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \text{ или } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|K(j\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < \infty,$$

где $K(j\omega)$ – частотная характеристика системы, имеющая импульсную характеристику $h(t)$.

Импульсная и частотная характеристики связаны между собой парой преобразований Фурье

$$K(j\omega) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.11)$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.12)$$

Учитывая физическую реализуемость фильтра, формулу (3.11) запишем в виде

$$K(j\omega) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3.13)$$

Пример: Покажем, что фильтр нижних частот с частотной характеристикой вида $K(j\omega) = |K(j\omega)| e^{-j\omega t_0}$, где

$$|K(j\omega)| = \begin{cases} 1 & \text{если } |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & \text{если } \omega < -\omega_0, \omega > \omega_0 \end{cases},$$

– физически нереализуемая система.

Действительно,

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} |K(j\omega)| e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = \frac{e^{j\omega_0(t-t_0)} - e^{-j\omega_0(t-t_0)}}{2\pi j(t-t_0)} =$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi} \frac{\sin(\omega_0(t-t_0))}{(\omega_0(t-t_0))}.$$

Из этой формулы видно, что нарушается принцип причинности (3.10) и невозможно в принципе реализовать фильтр с указанной частотной характеристикой.

Если известна импульсная характеристика, используя интеграл Дюамеля, можно определить математическое ожидание и корреляционную функцию на выходе системы:

$$E[\eta(t)] = \int_0^t h(t-\tau) E[\xi(\tau)] d\tau, \quad (3.14)$$

$$E[\eta(t_1)\eta(t_2)] = B_\eta(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h(t_1-\tau_1) h(t_2-\tau_2) E[\xi(\tau_1)\xi(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2. \quad (3.15)$$

Определим математическое ожидание и корреляционную функцию на выходе интегрирующей цепи, рис (3.2), используя импульсную характеристику, если на вход действует шум с математическим ожиданием $M\xi(t) = m_\xi$ и корреляционной функцией

$$B_\xi(t_2 - t_1) = \frac{N_0}{2} \delta(t_2 - t_1).$$

Импульсная характеристика $h(t)$ интегрирующей цепи определяется с помощью (3.4)

$$h(t) = \alpha e^{-\alpha t} \int_0^t \delta(x) e^{\alpha x} dx = \alpha e^{-\alpha t}, \text{ где } \alpha = 1/(RC).$$

Подставим значения $h(t)$, $E(\xi(t))$, $B_\xi(t_2-t_1)$ в (3.14), (3.15) и получим

$$E[\eta(t)] = \alpha m_{\xi} \int_0^t e^{-\alpha x} dx = m_{\xi} (1 - e^{-\alpha t}),$$

$$\begin{aligned} B_{\eta}(t_1, t_2) &= \alpha^2 \frac{N_0}{2} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} e^{-\alpha(t_1 - \tau_1)} e^{-\alpha(t_2 - \tau_2)} \delta(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \frac{\alpha N_0}{4} e^{-\alpha|t|} (1 - e^{-2\alpha t}). \end{aligned}$$

Применение частотных характеристик. Будем считать, что известна спектральная плотность мощности $F_{\xi}(\omega)$ стационарного процесса $\xi(t)$ на входе цепи. Необходимо определить спектральную плотность мощности $F_{\eta}(\omega)$ процесса $\eta(t)$ на выходе линейной цепи, (рис. 3.5).

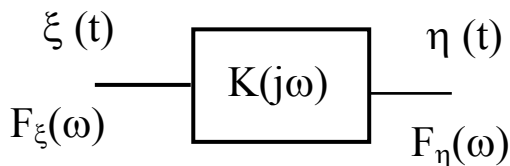


Рис. 3.5

Для определения спектральной плотности мощности $F_{\eta}(\omega)$ используем преобразование Винера–Хинчина, предполагая, что известна

корреляционная функция процесса $\eta(t)$, выраженная через импульсную характеристику цепи. Затем используем связь импульсной характеристики и частотной характеристики цепи.

Предварительно сделаем замену переменных в (3.15) вида

$t_1 - \tau_1 = u$, $t_2 - \tau_2 = v$ и подстановку $t_2 - t_1 = \tau$. После замены переменных имеем

$$B_{\eta}(t_1, t_1 + \tau) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_1 + \tau} h(u) h(v) B_{\xi}(\tau - v + u) du dv.$$

Ввиду того, что рассматривается установившийся процесс $\eta(t)$, положим $B_\eta(t_1, t_1 + \tau) = B_\eta(\tau)$.

Подставим полученное выражение в преобразование Винера–Хинчина

$$\begin{aligned} F_\eta(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{t_1} \int_0^{t_1+\tau} h(u) h(v) B_\xi(\tau - v + u) e^{-j\omega\tau} du dv d\tau . \end{aligned}$$

Сделаем подстановку $\tau = z + v - u$, разделим интегралы и, так как рассматривается стационарный режим, заменим t_1 на ∞ в пределах интегрирования. В результате имеем

$$F_\eta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_\xi(z) e^{-j\omega z} dz \int_0^{\infty} h(v) e^{-j\omega v} dv \int_0^{\infty} h(u) e^{j\omega u} du .$$

Используя определение (3.13), запишем

$$F_\eta(\omega) = F_\xi(\omega) K(j\omega) K(-j\omega) = F_\xi(\omega) |K(j\omega)|^2 \quad (3.16)$$

Вывод: спектральная плотность мощности на выходе линейной цепи пропорциональна спектральной плотности мощности на входе и квадрату модуля частотной характеристики линейной цепи, (фазовые зависимости отсутствуют).

Для сравнения приведем выражение спектральной функции на выходе линейной цепи при воздействии детерминированного сигнала $s_{\text{BX}}(t)$ со спектральной функцией $F_{\text{BX}}(j\omega)$, (рис. 3.6):

$$F_{\text{ВЫХ}}(j\omega) = F_{\text{ВХ}}(j\omega) K(j\omega) = |F_{\text{ВХ}}(j\omega)| |K(j\omega)| e^{j(\varphi_{\text{ВХ}}(\omega) + \varphi_K(\omega))} . \quad (3.17)$$

Из сравнения формул (3.16) и (3.17) видно, что при воздействии

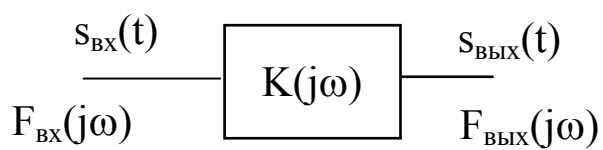


Рис. 3.6

на линейную цепь детерминированного сигнала выходной сигнал содержит как амплитудный, так и фазовый спектры.

Литература

1. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Радио и связь, 1989. – 656 с.
2. *Гоноровский И.С.* Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Радио и связь, 1986. – 512 с.
3. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
4. *Баскаков С.И.* Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высшая школа, 1988. – 448 с.
5. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. – М.: Наука, 1969. – 656 с.
6. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. Ч.1. – М.: Наука. 1976. – 494 с.
7. *Пугачёв В.С.* Теория случайных функций. – М.: Физматгиз, 1962. – 884 с.
8. *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции. – М.: Наука, 1964. – 344 с.
9. *Тихонов В.И., Харисов В.Н.* Статистический анализ радиотехнических устройств и систем. – М.: Радио и связь, 1991. – 608 с.
10. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. – М.: Физматгиз, 1961. – 406 с.
11. *Карлин С.* Основы теории случайных процессов. – М.: Мир. 1971. – 536 с.
12. *Физический энциклопедический словарь.* – М.: Сов. энциклопедия, 1983. – 928 с.

13. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. 4-е изд., стереотип. – М.: Наука, Физматгиз, 1969. – 576 с.
14. *Эйнштейн А., Смолуховский М.* Броуновское движение / Сб. ст., [пер. с нем. и франц.], – М.–Л., 1936
15. *Казаков В.А.* Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи. – М.: Советское радио, 1973. – 232 с.
16. Элементы теории массового обслуживания [электронный ресурс] <http://math.semestr.ru/cmo/mark.php>
17. *Вентцель Е.С.* Исследование операций. – М.: Советское радио, 1972. – 552 с.
18. *Peter K. Friz, Nicolas B. Victoir.* Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths: Theory and Applications (Cambridge Studies in Advanced Mathematics). – 2010, 672 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ	1
1.1 Общие понятия.....	3
1.2. Функция распределения случайного процесса	6
1.3. Моментные функции случайного процесса	12
1.4. Стационарный случайный процесс	15
1.5. Характеристическая функция случайного процесса	22
1.6. Дифференцирование и интегрирование случайного процесса ..	28
1.7. Эргодические случайные процессы	33
1.8. Спектральная функция стационарного случайного процесса ..	44
2.1. Детерминированный процесс как случайный процесс	55
2.2 Белый шум	57
2.3 Нормальный случайный процесс	58
2.4 Каноническое разложение случайного процесса.....	62
2.5 Квазидетерминированный случайный процесс.....	66
2.6 Узкополосный случайный процесс	68
2.7 Марковские процессы	75
2.7.1 Непрерывный марковский процесс.....	77
2.7.3 Винеровский процесс	82
2.7.4. Марковские цепи	85
2.7.5 Примеры марковских процессов	90
2.7.6 Процесс Пуассона. Дробовой эффект.....	95
3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ИНЕРЦИОННЫХ ЦЕПЯХ	98
Литература.....	111

